

### 3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR - LEIC-A

#### JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

1) Considere o produto interno usual em  $\mathbb{R}^4$  e os seguintes subespaços lineares:

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2z = 0 \text{ e } y - 2w = 0\}, \quad V = L(\{(2, 2, 1, 1), (0, 0, 2, 2)\}).$$

a) (1.0) Determine uma base ortogonal para  $U$ .

b) (1.0) Determine  $P_V(1, 1, -1, -1)$ .

c) (0.5) Determine  $d((1, 1, -1, -1), U^\perp + V^\perp)$ .

2) Considere as transformações lineares  $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}_1$  e  $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tais que

$$M(T_1; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2(1, 1, 1) = (1, 1), \quad T_2(1, 0, 2) = (1, 2) \quad \text{e} \quad T_2(2, 0, 1) = (2, 1)$$

com  $\mathcal{B}_c^3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  e  $\mathcal{B} = \{1 + t, 1\}$  bases ordenadas de  $\mathbb{R}^3$  e de  $\mathcal{P}_1$  respectivamente.

a) (1.0) Determine uma base para  $\mathcal{N}(T_1)$  e diga se  $T_1$  é sobrejectiva.

b) (1.0) Determine  $M(T_1; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1})$ , com  $\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1} = \{1, t\}$  base ordenada de  $\mathcal{P}_1$ .

c) (1.0) Determine  $T_2(0, 1, 0)$  e encontre, em  $\mathbb{R}^3$ , a solução geral da equação linear  $T_2(x, y, z) = (1, -1)$ .

d) (0.5) Seja  $T : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  linear tal que  $(T \circ T_1)(x, y, z) = T_2(x, y, z)$ , para todo o  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Determine  $T(a_0 + a_1t)$ , com  $a_0 + a_1t \in \mathcal{P}_1$ .

3) (1.0) Considere a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $T(x, y, z) = (3x + y, 3y, 2z)$ . Verifique se  $T$  é diagonalizável.

4) Considere o produto interno usual em  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

a) (1.0) Determine uma matriz diagonal  $D$  e uma matriz ortogonal  $P^T$  tais que  $D = PAP^T$ .

b) (0.5) Determine  $\sqrt{A}$ .

5) (0.5) Considere em  $\mathcal{P}_2$  um produto interno  $\langle, \rangle$  para o qual a base ordenada  $\{1 + t, 1 + t^2, 1\}$  seja ortonormada e determine uma base ortonormada para  $(L(\{3 + t + t^2, 2 + t^2\}))^\perp$ .

6) (1.0) Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  tal que  $\text{tr}(AX) = 0$  para todo o  $X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  que verifique  $\text{tr}(X) = 0$ . Mostre que existe um escalar  $\lambda$  tal que  $A = \lambda I$ .