Instituto Superior Técnico | 1^o Semestre 2013/2014
Departamento de Matemática | 21 de Dezembro de 2013
Duração: 90 minutos

3^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR - LEIC

1) Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0 \quad \text{e} \quad y + w = 0\right\}, \qquad V = L\left\{(1,0,0,1),(1,0,1,0)\right\}.$$

a) (1.0) Determine, justificando, uma base ortogonal para $U^\perp$.

b) (1.0) Determine, justificando, $P_V(-1,1,0,0)$.

c) (1.0) Determine, justificando, a distância entre $(0,1,0,0)$ e V.

2) (1.0) Considere em $\mathbb{R}^2$ um produto interno $\langle , \rangle$ para o qual a base ordenada $\{(-1,1),(1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ seja ortonormada e determine $\langle (1,0),(0,1)\rangle$, relativamente a esse produto interno.

3) (1.0) Calcule $\det \begin{bmatrix} \pi & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por: $T(x,y,z) = (x, z, z - 2x)$.

a) (1.0) Determine bases para os espaços próprios de T e diga, justificando, se T é uma projecção, isto é, se $T^2 = T$.

b) (1.0) Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$. Diga, justificando, se existe uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada por 2 vectores próprios de T.

5) (1.0) Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Determine uma matriz B de valores próprios não negativos tal que $B^2 = A$.

6) (1.0) Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual. Determine uma matriz simétrica e não invertível $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$\mathcal{N}(A - 2I) = L\left(\{(1,0,1),(0,1,0)\}\right).$$

7) (1.0) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz normal. Mostre que existe uma matriz unitária Q tal que

$$A = A^H Q$$