Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^o Semestre 2016/2017
17 de Dezembro de 2016
Duração: 90 minutos

3^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR - LEIC - A

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

1) (1.5) Sejam $\mathcal{B}_1 = \{1-2t, -2+5t\}$ e $\mathcal{B}_2$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$. Suponha que a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$ é dada por: $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$. Determine $\mathcal{B}_2$.

2) (1.5) Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ tal que:

$$T(1) = 1, \qquad T\left(1+t-t^2\right) = 1+t-t^2, \qquad T\left(t^2\right) = t+2t^2.$$

Determine, caso exista, uma base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_2$ para a qual a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ seja diagonal.

3) Considere a transformação linear $T_1 : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T_1(1-t) = (1,-1), \qquad T_1\left(t-t^2\right) = (0,-1), \qquad T_1\left(t^2\right) = (-2,2).$$

Seja $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a+c=0 \right\}$ e considere ainda a transformação linear $T_2 : U \to \mathcal{P}_2$ tal que

$$T_2\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1-t, \qquad T_2\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1+t, \qquad T_2\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1.$$

a) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{N}(T_1)$ e diga se T_1 é sobrejectiva.

b) (1.0) Determine $M(T_1;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$, com $\mathcal{B}_1 = \{1-t^2, 1-2t+t^2, t^2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,-2),(1,0)\}$ bases ordenadas de $\mathcal{P}_2$ e de $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

c) (1.0) Determine todas as matrizes $A \in U$ para as quais se tenha: $T_2(A) = 2$.

d) (1.0) Determine a expressão geral de $T_1 \circ T_2$, isto é, determine $(T_1 \circ T_2)(A)$, para todo o $A \in U$.

4) (1.5) Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$. Seja $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ simétrica tal que $\det A = -1$ e $\mathcal{N}(A+I) = L(\{(1,1)\})$. Calcule $A^2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

5) (1.5) Seja $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ e sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ os seus valores próprios. Mostre que se

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$$

então A é normal.