Ficha de preparação para o 2^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR - LEGM - MEC

1) Seja $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a + 2d = 2b + c = 0 \right\}$. Considere $T : U \to \mathcal{P}_2$ linear tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 + t^2, \quad T\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -2 - 2t^2 \quad \text{e} \quad T\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) = -1 - t^2.$$

a) Determine uma base para $\mathcal{N}(T)$ e uma base para $\mathcal{I}(T)$.
b) Diga se T é injectiva e se T é sobrejectiva.
c) Resolva a equação linear $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 3 + 3t^2$, com $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$.

2) Sejam $T : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1$ lineares tais que

$$T(1+t) = (1,1), \qquad T(1-t) = (1,-1) \quad \text{e} \quad M\left(S; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com $\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B} = \{1+t, 1-t\}$ bases ordenadas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e de $\mathcal{P}_1$ respectivamente.
a) Diga se T é um isomorfismo e determine, se existir, $T^{-1}(x,y)$ para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
b) Determine: uma base para $\mathcal{N}(T)$, uma base para $\mathcal{N}(S)$, uma base para $\mathcal{I}(T)$ e uma base para $\mathcal{I}(S)$.
c) Determine $S\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)$.
d) Determine $S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$, para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
e) Seja $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Determine $M(S; \mathcal{B}_1; \mathcal{B})$.
f) Determine $(T \circ S)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$, para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
g) Resolva a equação linear $T(a_0 + a_1 t) = (5,0)$, com $a_0 + a_1 t \in \mathcal{P}_1$.
h) Resolva a equação linear $S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2$, com $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

3) Considere as transformações lineares $T : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$ tais que $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $M(S; \mathcal{B}_3; \mathcal{B}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, com $\mathcal{B}_1 = \{1+t, 1-t\}$ e $\mathcal{B}_4 = \{1-t, 1\}$ bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{B}_2 = \{(0,1), (1,0)\}$ e $\mathcal{B}_3 = \{(1,-1), (1,0)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.
a) Determine $M(S \circ T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_4)$.
b) Determine $M(T \circ S; \mathcal{B}_3; \mathcal{B}_2)$.
c) Determine $T(a_0 + a_1 t)$ para qualquer $a_0 + a_1 t \in \mathcal{P}_1$.
d) Justifique que T é um isomorfismo e determine $T^{-1}(x,y)$ para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
e) Determine $S(x,y)$ para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
f) Justifique que S é um isomorfismo e determine $S^{-1}(a_0 + a_1 t)$ para qualquer $a_0 + a_1 t \in \mathcal{P}_1$.
g) Determine $(S \circ T)(a_0 + a_1 t)$ para qualquer $a_0 + a_1 t \in \mathcal{P}_1$.
h) Justifique que $S \circ T$ é um isomorfismo e determine $(S \circ T)^{-1}(a_0 + a_1 t)$ para qualquer $a_0 + a_1 t \in \mathcal{P}_1$.
i) Determine $(T^{-1} \circ S^{-1})(a_0 + a_1 t)$ para qualquer $a_0 + a_1 t \in \mathcal{P}_1$.