Resolução do 2^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

1) a) $\mathcal{N}(T) = \{(x,y,z) : (x,z,x,z) = (0,0,0,0)\} = L(\{(0,1,0)\})$. Como $\{(0,1,0)\}$ gera $\mathcal{N}(T)$ e é linearmente independente é então uma base para $\mathcal{N}(T)$.

$\mathcal{I}(T) = \{(x,z,x,z) : x,z \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\})$. Como $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$ gera $\mathcal{I}(T)$ e é linearmente independente é então uma base para $\mathcal{I}(T)$.

b) Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3 < 4 = \dim \mathbb{R}^4$ e tendo-se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, então T não é sobrejectiva.

2) $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B})\, S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3) a) Como $\{1+t, 1-t\}$ é linearmente independente e $\{T_1(1+t), T_1(1-t)\}$ é linearmente independente, e além disso sendo $\{1+t,1-t\}$ gerador de $\mathcal{P}_1$ então T_1 é injectiva.

b) Como $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

então $T_2\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1(1+t) + 1(1-t) = 2$.

c) Como $M(T_1;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ então $M(T_1 \circ T_2;\mathcal{B}_c^{2\times 2};\mathcal{B}_c^2) = M(T_1;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2)\, M(T_2;\mathcal{B}_c^{2\times 2};\mathcal{B}) =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Por outro lado, como $\left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}_c^{2\times 2}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ então $(T_1 \circ T_2)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \left[(T_1 \circ T_2)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}_c^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = (a+b+c+d, a-b+c-d)$

.

4) Como $\{1-2t, 2+2t\}$ é linearmente independente e $\{T(1-2t), T(2+2t)\}$ é linearmente independente, e além disso sendo $\{1-2t, 2+2t\}$ gerador de $\mathcal{P}_1$ então T é injectiva. Como $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2T(1-2t) + 2T(2+2t) = T(2(1-2t) + 2(2+2t)) = T(6)$ e T é injectiva ($\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$) então $CS = \{6\} + \mathcal{N}(T) = \{6\}$.

5) $T_1 : V \to W$ e $T_2 : U \to V$, $T_1 \circ T_2 : U \to W$. Tem-se $\dim \mathcal{N}(T_2) + \dim \mathcal{I}(T_2) = U = \dim \mathcal{N}(T_1 \circ T_2) + \dim \mathcal{I}(T_1 \circ T_2)$. Logo para ter-se $\dim \mathcal{I}(T_1 \circ T_2) \leq \dim \mathcal{I}(T_2)$ bastará ver que $\dim \mathcal{N}(T_1 \circ T_2) \geq \dim \mathcal{N}(T_2)$. Vejamos que $\mathcal{N}(T_2) \subset \mathcal{N}(T_1 \circ T_2)$. Seja $u \in \mathcal{N}(T_2)$. Então $T_2(u) = \mathbf{0}$. Logo $(T_1 \circ T_2)(u) = T_1(T_2(u)) = T_1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e assim $u \in \mathcal{N}(T_1 \circ T_2)$. Deste modo $\mathcal{N}(T_2)$ é um subespaço de $\dim \mathcal{N}(T_1 \circ T_2)$ de dimensão finita. Logo $\dim \mathcal{N}(T_1 \circ T_2) \geq \dim \mathcal{N}(T_2)$ e assim $\dim \mathcal{I}(T_1 \circ T_2) \leq \dim \mathcal{I}(T_2)$.