Resolução do 2^o teste de ÁLGEBRA LINEAR LEGM - MEC

1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = (-2)\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ logo $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ são as coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ em $\mathcal{B}_2$.

2) Como T é linear e $V = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\right\}\right)$ então $\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{T\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\right)\right\}\right) = L(\{1-3t^2\})$ e logo $\{1-3t^2\}$ é uma base (por também ser LI) de $\mathcal{I}(T)$. Como $\dim \mathcal{N}(T) = \dim U - \dim \mathcal{I}(T) = 2-1 = 1$ e $0 + 0t + 0t^2 = 1 - 3t^2 + (-1+3t^2) = T\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\right) \underset{T \text{ é linear}}{=} T\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\right)$ então $\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para $\mathcal{N}(T)$.

3) Como T é linear e $\mathbb{R}^2 = L(\{(8,8), (3,1)\})$ então $\mathcal{I}(T) = L(\{T(8,8), T(3,1)\}) = L(\{2+2t, t\})$ e como $\{2+2t, t\}$ é linearmente independente é então uma base para $\mathcal{I}(T)$ e assim $\mathcal{I}(T) = \mathcal{P}_1$ pelo que T é sobrejectiva. Como $\dim \mathcal{N}(T) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \mathcal{I}(T) = 2-2 = 0$ então T é injectiva. Como T é linear e bijectiva é então um isomorfismo. Assim $T(3,1) = t \Leftrightarrow T^{-1}(t) = (3,1)$ e $T(8,8) = 2+2t \Leftrightarrow T^{-1}(2+2t) = (8,8)$ e como T^{-1} é linear então $T^{-1}(1) = \frac{1}{2}\left(T^{-1}(2+2t) - 2T^{-1}(t)\right) = \frac{1}{2}((8,8) - 2(3,1)) = (1,3)$.

Logo $T^{-1}(a_0 + a_1 t) = a_0 T^{-1}(1) + a_1 T^{-1}(t) = a_0(1,3) + a_1(3,1) = (a_0 + 3a_1, 3a_0 + a_1)$.

4) Tendo-se $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_3) = S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_3} M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$ e $S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_3} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ uma vez que $(-1,-1) = (-1)(1,1) + 0(1,0)$ e $(1,2) = 2(1,1) + (-1)(1,0)$ então $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_3) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ e assim $M(S\circ T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_4) = M(S;\mathcal{B}_3;\mathcal{B}_4)\, M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

5) Como T é linear e $\mathcal{P}_2 = L(\{6+4t+2t^2, 6+3t+3t^2, 6+8t+2t^2\})$ então

$\mathcal{I}(T) = L(\{T(6+4t+2t^2), T(6+3t+3t^2), T(6+8t+2t^2)\}) = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$ e logo $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base (por também ser LI) de $\mathcal{I}(T)$. Tem-se $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T(3+2t+t^2)$. Como $\dim \mathcal{N}(T) = \dim \mathcal{P}_2 - \dim \mathcal{I}(T) = 3-1 = 2$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T(6+3t+3t^2) - 3T(3+2t+t^2) = T(-3-3t)$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T(6+8t+2t^2) - 4T(3+2t+t^2) = T(-6-2t^2)$ então $\{1+t, 3+t^2\}$ é uma base para $\mathcal{N}(T)$. Logo $CS = \{3+2t+t^2\} + L(\{1+t, 3+t^2\})$.