Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2^o Semestre 2017/2018
2 de Maio de 2018
Duração: 45 minutos

2^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LENO - MEAer - MEAmbi - MEBiol - MEEC - MEM - MEMec - MEQ

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

1) Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, z) = (x, z, x, z)$.

a) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{N}(T)$ e uma base para $\mathcal{I}(T)$.

b) (0.5) Diga se T é sobrejectiva.

2) (1.0) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$, com

$$\mathcal{B}_c^3 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = \{(-1,0,1), (1,-1,1), (1,0,0)\}$$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$. Determine $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$.

3) Considere as transformações lineares $T_1 : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1$ tais que

$$T_1(1+t) = (1,1) \qquad T_1(1-t) = (1,-1) \qquad \text{e} \qquad M\left(T_2; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com $\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B} = \{1+t, 1-t\}$ bases ordenadas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e de $\mathcal{P}_1$ respectivamente.

a) (0.5) Diga se T_1 é injectiva.

b) (0.5) Determine $T_2\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

c) (0.5) Determine a expressão geral de $T_1 \circ T_2 : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, isto é, determine, para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(T_1 \circ T_2)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$.

4) (0.5) Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$T(1-2t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad T(2+2t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolva a equação linear $T(a_0 + a_1 t) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

5) (0.5) Sejam U, V e W espaços lineares de dimensão finita. Considere transformações lineares $T_1 : V \to W$ e $T_2 : U \to V$. Mostre que $\dim \mathcal{I}(T_1 \circ T_2) \leq \dim \mathcal{I}(T_2)$.