Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$1^o$ Semestre 2018/2019
14 de Novembro de 2018
Duração: 45 minutos

# $2^o$ TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEGM - MEC

**JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS**

**1)** (1.0) Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ duas bases ordenadas de um espaço linear $U$, com $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Considere ainda

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determine as coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ em $\mathcal{B}_2$.

**2)** (1.0) Seja $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a+b = c+d = 0 \right\}$. Considere $T : V \to \mathcal{P}_2$ linear tal que

$$T\left( \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 1 - 3t^2 \qquad \text{e} \qquad T\left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \right) = -1 + 3t^2.$$

Determine uma base para $\mathcal{I}(T)$ e uma base para $\mathcal{N}(T)$.

**3)** (1.0) Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$ linear tal que

$$T(8,8) = 2 + 2t \qquad \text{e} \qquad T(3,1) = t.$$

Diga se $T$ é um isomorfismo e determine, se existir, $T^{-1}(a_0 + a_1 t)$ para qualquer $a_0 + a_1 t \in \mathcal{P}_1$.

**4)** (1.0) Considere $T : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$ lineares tais que

$$M(S; \mathcal{B}_3; \mathcal{B}_4) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

com $\mathcal{B}_1 = \{t, 1+t\}$ e $\mathcal{B}_4 = \{1+t, 1\}$ bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{B}_2 = \{(-1,-1), (1,2)\}$ e $\mathcal{B}_3 = \{(1,1), (1,0)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

Determine $M(S \circ T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_4)$.

**5)** (1.0) Considere $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ linear tal que

$$T\left(6 + 4t + 2t^2\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad T\left(6 + 3t + 3t^2\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad T\left(6 + 8t + 2t^2\right) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determine o conjunto solução da equação linear $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.