Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1^o semestre 2017/2018
21 de Novembro de 2017
Duração: 45 minutos

2^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores - Alameda

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

1) (1.0) Considere os seguintes subespaços lineares de $\mathcal{P}_3$

$U_1 = L\left(\left\{-1+t-t^2, 1-3t+3t^2-2t^3, 2t-2t^2+2t^3\right\}\right)$ e $U_2 = \{a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3 : a_1+a_2=0\}$.

Determine uma base para $U_1 \cap U_2$.

2) (1.0) Considere os seguintes subespaços lineares de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$V_1 = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right) \quad \text{e} \quad V_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b+c=0\right\}.$$

Determine uma base para $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que inclua pelo menos três vectores de V_1+V_2.

3) (1.0) Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule a entrada $(4,2)$ de A^{-1}.

4) (1.0) Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Diga se existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A e determine-a caso exista.

5) (0.5) Determine $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{N}(A-I) = L(\{(1,-1)\})$ e $\mathcal{N}(A+I) = L(\{(1,1)\})$.

6) (0.5) Sejam U e V subespaços lineares de um espaço linear de dimensão finita, tais que

$$\dim(U+V) = \dim(U\cap V)+1.$$

Mostre que $U \subset V$ ou $V \subset U$.