Resolução do 1^o teste de ÁLGEBRA LINEAR LEGM - MEC

1) a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & \alpha & | & 2 \\ -1 & 0 & \alpha & 0 & | & 4 \\ -1 & 0 & \alpha & \alpha & | & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & \alpha & | & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & -\alpha & | & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & \alpha & | & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & -\alpha & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & | & -2 \end{bmatrix}.$

Se $\alpha \in \mathbb{R}\backslash \{-1,0\}$ então $\text{car}\, A = 3 = \text{car}\,[A \mid B] < 4$ e o sistema é possível e indeterminado. Se $\alpha = 0$ então $\text{car}\, A = 2 < 3 = \text{car}\,[A \mid B]$ e o sistema é impossível.

Se $\alpha = -1$ então $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -2 \end{bmatrix} \underset{L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$ então $\text{car}\, A = 2 = \text{car}\,[A \mid B] < 4$ e o sistema é possível e indeterminado. Assim, o sistema é possível se e só se $\alpha \in \mathbb{R}\backslash \{0\}$.

b) Se $\alpha = 1$ então como se tem $\begin{cases} -x - z + w = 2 \\ 2z - w = 2 \\ w = -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ z = 0 \\ w = -2, \end{cases}$ a solução geral é dada por: $\{(-4, y, 0, -2) : y \in \mathbb{R}\}$.

2) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - I\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

3) a) Como $\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & x \\ 1 & 0 & | & y \\ 0 & 1 & | & z \end{bmatrix} \underset{\cdots}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & x \\ 0 & 0 & | & -x+y \\ 0 & 1 & | & z \end{bmatrix}$ então $V_2 = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$ e assim $(x,y,z) - (1,2,3) \in \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$ equivale a ter-se $-1\,(x-1) + y - 2 = 0$. Logo a equação linear $-x + y = 1$ tem CS como conjunto solução.

b) Como $V_2 = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$ então $V_1 \cap V_2 = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,1,2)\}\right)$. Por outro lado, tem-se $V_1 = L\left(\{(-1,1,0),(1,0,1)\}\right)$ e assim $V_1 + V_2 = L\left(\{(-1,1,0),(1,0,1),(1,1,0),(0,0,1)\}\right)$.

Atendendo a $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\cdots}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\dim(V_1 + V_2) = 3$ pelo que $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$. Logo $\{(1,0,0),(1,1,2),(0,0,1)\}$ é por exemplo uma base de $V_1 + V_2$ que inclui um vector de $V_1 \cap V_2$.

4) Como $\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$, $\dim W_1 = 2$ e atendendo a ter-se (em linha) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ então $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base de um subespaço W_2 tendo-se $W_1 \oplus W_2 = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

5) Como $U = L\left(\{1+t, 1+t^2\}\right)$ e $V = L\left(\{2+t^2\}\right)$ então $p(t) = \alpha(1+t) + \beta(1+t^2) = \alpha + \beta + \alpha t + \beta t^2$ e $q(t) = \gamma(2+t^2) = 2\gamma + \gamma t^2$. Assim $t = p(t) + q(t) \Leftrightarrow (t = \alpha + \beta + \alpha t + \beta t^2 + 2\gamma + \gamma t^2) \Leftrightarrow t = \alpha + \beta + 2\gamma + \alpha t + (\beta + \gamma)\, t^2 \Leftrightarrow (\alpha = 1,\ \beta = 1 \text{ e } \gamma = -1)$. Logo $p(t) = 2 + t + t^2$ e $q(t) = -2 - t^2$.

6) Como $\mathcal{C}(AB) \subset \mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(AB) \subset \mathcal{L}(B)$ então $\text{car}\,(AB) = \dim\, \mathcal{C}(AB) \leq \dim\, \mathcal{C}(A) = \text{car}\,(A)$ e $\text{car}\,(AB) = \dim\, \mathcal{L}(AB) \leq \dim\, \mathcal{L}(B) = \text{car}\,(B)$. Logo $\text{car}\,(AB) \leq \dfrac{1}{2}\left(\text{car}\,(A) + \text{car}\,(B)\right)$.