

Resolução do 1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC-A

1) a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[-L_1+L_3 \rightarrow L_3]{-2L_1+L_2 \rightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}L_2+L_3 \rightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$ O sistema é possível se e só se $\text{car } A = \text{car } [A \mid B]$ se e só se $\alpha = 0$.

b) Se $\alpha = 0$ tem-se $x - z = 0$ e então o conjunto solução é dado por: $\{(x, y, x) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

2) $(A - 2I) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$

3) Como $W = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 : a_0 = -2a_1 - a_2 = 0\} = \{-2a_1 - a_2 + a_1t + a_2t^2 : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \{(-2 + t)a_1 + (-1 + t^2)a_2 : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = L(\{-2 + t, -1 + t^2\})$, então o conjunto $\{-2 + t, -1 + t^2\}$ é um conjunto gerador de W .

4) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$ equivale a ser possível o sistema $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & a \\ -1 & 1 & b \\ 1 & -1 & c \\ 0 & 1 & d \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & b+c \\ 0 & 0 & -a+d \end{array} \right]$ ou seja: $b + c = 0$ e $-a + d = 0$, logo $U \cap V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b + c = 0, \quad b - c = 0 \quad \text{e} \quad -a + d = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} : d \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}\right)$. Assim, por exemplo, para $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem-se $U \cap V = L(\{A\})$.

5) $(x_1, x_2, x_3) \in L(\{(1, 0, -1), (2, -1, 0)\})$ equivale a $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 \\ -1 & 0 & x_3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1 + 2x_2 + x_3 \end{array} \right]$ ser possível ou seja: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$, logo $L(\{(1, 0, -1), (2, -1, 0)\}) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right)$. Como $(0, 1, -2) \in \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right)$, para que se tenha $\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) \supset L(\{(0, 1, -2), (x, y, z)\})$ é necessário que $(x, y, z) \in \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right)$. Além disso, se existisse $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y, z) = \alpha(0, 1, -2)$ ter-se-ia $L(\{(0, 1, -2), (x, y, z)\}) = L(\{(0, 1, -2)\}) \subsetneq \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right)$. Assim, não existindo $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y, z) = \alpha(0, 1, -2)$, por exemplo,

para $(x, y, z) = (1, -1, 1)$, tem-se $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$ ou seja $L(\{(0, 1, -2), (1, -1, 1)\}) \subset$

$L(\{(1, 0, -1), (2, -1, 0)\})$. Como $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$ é invertível, tem-se $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right] =$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ e assim } L(\{(0, 1, -2), (1, -1, 1)\}) \supset L(\{(1, 0, -1), (2, -1, 0)\}).$$

Logo $L(\{(1, 0, -1), (2, -1, 0)\}) = L(\{(0, 1, -2), (x, y, z)\})$, por exemplo para $(x, y, z) = (1, -1, 1)$.