Resolução do 1^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC-A

1) a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & | & 0 \end{bmatrix} \underset{-\alpha L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -\alpha \end{bmatrix}$. O sistema é possível e indeterminado se e só se $\operatorname{car} A = \operatorname{car}[A \mid B] < 3$ ($=n^o$ de colunas de A) se e só se $\alpha = 0$.

b) Se $\alpha = 0$ então o conjunto solução é dado por: $\{(x,1,1) : x \in \mathbb{R}\}$.

2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (I+A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3) Como $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e A é invertível então $\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}$ e o conjunto solução do sistema linear $AX = B$ é dado por: $\{(1,0,0,1)\} + \mathcal{N}(A) = \{(1,0,0,1)\}$.

4) $\dim W = \operatorname{nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2$ e como o conjunto $\mathcal{B} = \{1-t, t-t^2\} \subset W$ é linearmente independente, é então uma base de W. Como $1 - t^2 = 1\,(1-t) + 1\,(t-t^2)$ então 1 e 1 são as coordenadas de $1-t^2$ na base $\mathcal{B}$.

5) Como $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é linearmente independente e gera U é então uma base para U e assim $\dim U = 2$. Para que se tenha $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus V$, isto é, $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U + V$ com $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$, é necessário que se tenha $\dim V = \dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) - \dim U = 4 - 2 = 2$.

6) Seja $(x,y,z) \in V_1$, então é possível o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & x \\ 0 & 1 & | & y \\ 0 & 0 & | & z \end{bmatrix}$ ou seja $\operatorname{car} A = \operatorname{car}[A \mid B]$ o que equivale a ter-se: $z = 0$, logo $V_2 = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$. Como $V_1 = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$ então $V_1 \cap V_2 = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \{(-y,y,0) : y \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1,1,0)\})$. Assim, como $\{(-1,1,0)\}$ gera $V_1 \cap V_2$ e é linearmente independente, é então uma base para $V_1 \cap V_2$.