

**1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR**  
LEGM - MEC

**JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS**

**1)** Para cada parâmetro real  $\alpha$ , considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & \alpha & 2 \\ -1 & 0 & \alpha & 0 & 4 \\ -1 & 0 & \alpha & \alpha & 2 \end{array} \right].$$

- a)** (1.0) Determine os valores de  $\alpha$  para os quais o sistema anterior é possível.  
**b)** (0.5) Determine o conjunto solução do sistema correspondente a  $\alpha = 1$ .

**2)** (1.0) Determine a matriz  $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  tal que

$$\left( \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right] A^T \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \right)^T = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] A.$$

**3)** Considere os subespaços  $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$  e  $V_2 = L(\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\})$  de  $\mathbb{R}^3$ .

- a)** (0.5) Seja  $CS = \{(1, 2, 3)\} + V_2$ . Determine uma equação linear cujo conjunto solução seja  $CS$ .  
**b)** (0.5) Determine uma base para  $V_1 + V_2$  que inclua um vector de  $V_1 \cap V_2$ .

**4)** (0.5) Considere o subespaço  $W_1 = L\left(\left\{\left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right]\right\}\right)$  de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Determine uma base de um subespaço  $W_2$  de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  de modo a ter-se

$$W_1 \oplus W_2 = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

**5)** (0.5) Considere os subespaços  $U = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 : a_0 - a_1 - a_2 = 0\}$  e  $V = L(\{2 + t^2\})$  de  $\mathcal{P}_2$ . Determine  $p(t) \in U$  e  $q(t) \in V$  tais que

$$t = p(t) + q(t).$$

**6)** (0.5) Sejam  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$ . Mostre que

$$\text{car}(AB) \leq \frac{1}{2}(\text{car } A + \text{car } B).$$