

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
LEGM - MEC

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

1) Para cada parâmetro real α , considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & \alpha & 2 \\ -1 & 0 & \alpha & 0 & 4 \\ -1 & 0 & \alpha & \alpha & 2 \end{array} \right].$$

a) (1.0) Determine os valores de α para os quais o sistema anterior é possível.

b) (0.5) Determine o conjunto solução do sistema correspondente a $\alpha = 1$.

2) (1.0) Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$\left(\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right] A^T \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \right)^T = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] A.$$

3) Considere os subespaços $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ e $V_2 = L(\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\})$ de \mathbb{R}^3 .

a) (0.5) Seja $CS = \{(1, 2, 3)\} + V_2$. Determine uma equação linear cujo conjunto solução seja CS .

b) (0.5) Determine uma base para $V_1 + V_2$ que inclua um vector de $V_1 \cap V_2$.

4) (0.5) Considere o subespaço $W_1 = L\left(\left\{\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right]\right\}\right)$ de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Determine uma base de um subespaço W_2 de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ de modo a ter-se

$$W_1 \oplus W_2 = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

5) (0.5) Considere os subespaços $U = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0 - a_1 - a_2 = 0\}$ e $V = L(\{2 + t^2\})$ de \mathcal{P}_2 . Determine $p(t) \in U$ e $q(t) \in V$ tais que

$$t = p(t) + q(t).$$

6) (0.5) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$. Mostre que

$$\text{car}(AB) \leq \frac{1}{2}(\text{car } A + \text{car } B).$$