Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2^o Semestre 2018/2019
20 de Março de 2019
Duração: 45 minutos

1^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LENO - MEAer - MEAmbi - MEBiol - MEEC - MEM - MEMec - MEQ

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

1) Para cada parâmetro real α, considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & \alpha \\ 0 & -1 & \alpha & -2\alpha \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

a) (1.0) Determine os valores de α para os quais o sistema anterior é impossível.

b) (0.5) Determine o conjunto solução do sistema correspondente a $\alpha = 1$.

2) (1.0) Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A \right)^T = I.$

3) Considere $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \ x+y+z=0\}$ e $V = L(\{(1,1,1,0),(-1,1,0,0)\})$.

a) (0.5) Determine uma base para U.

b) (0.5) Verifique se $\left(1,2,\frac{3}{2},0\right) \in V$.

c) (0.5) Determine uma base para $U \cap V$.

d) (0.5) Determine um subespaço W de $\mathbb{R}^4$ de modo a ter-se $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$ e relativamente a esse espaço W escolhido, determine $v \in V$ e $w \in W$ tais que $(1,2,3,4) = v + w$.

4) (0.5) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^4 = \mathbf{0}$ e $A^3 \neq \mathbf{0}$. Mostre que o conjunto $\{I, A, A^2, A^3\}$ é linearmente independente.