TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2019/2020

Ficha 8: Equações diferenciais lineares de primeira ordem

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

a) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$ b) $\dfrac{dy}{dt} = -ye^t$

c) $\dfrac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$ d) $\psi' = \psi - t$

e) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x-2)e^x$ f) $\dfrac{di}{dt} - 6i = 10\,\mathrm{sen}\,(2t)$

g) $\dfrac{dy}{dt} = y\left(\dfrac{1}{t} - \mathrm{tg}\,(t)\right) + t\cos(t)$ h) $(1+y^2)\dfrac{dx}{dy} = \mathrm{arc\,tg}\,(y) - x$

2. Determine as soluções dos seguintes problemas de valor inicial

a) $xy' = 2y + x^3e^x,\ y(1) = 0,$

b) $\dfrac{dv}{du} + \dfrac{2u}{1+u^2}v - \dfrac{1}{1+u^2} = 0,\ v(0) = 1.$

c) $\begin{cases} x' + h(t)x - t = 0, \\ x(-1) = 2 \end{cases}$, com $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$.

3. De acordo com a lei de arrefecimento de Newton, a taxa de arrefecimento de um corpo numa corrente de ar, é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a do ar. Assumindo que a temperatura do ar é 30^o e que o corpo arrefece de 100^o para 70^o em $15\mathrm{m}$, determine o tempo que o corpo demora a atingir a temperatura de 40^o.

4. Determine a solução geral da equação diferencial

$$x^2\cos(y)\frac{dy}{dx} = 2x\,\mathrm{sen}\,(y) - 1$$

Sugestão: Efectue a mudança de variável $v = \mathrm{sen}\, y$

5. Considere a equação diferencial

$$t^2\frac{dy}{dt} + 2ty - y^3 = 0$$

(a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-2}$.

(b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.

(c) No caso geral, considere a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x + \beta(t)x^n$$

onde α e β são funções definidas e contínuas num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Mostre que a mudança de variável $y(t) = (x(t))^{1-n}$ transforma a equação numa equação linear.

6. Resolva os seguintes problemas de valor inicial envolvendo equações de Bernoulli:

(a) $\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}\,y = \frac{y^3}{t^2}, \qquad y(1) = 2;$

(b) $t\frac{dy}{dt} + y = -ty^2, \qquad y(1) = 1.$

7. Considere a equação de Ricati escalar

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - x - x^2 \tag{1}$$

(a) Mostre que a função $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t)$ é solução da equação de Ricati sse ψ é solução de uma certa equação de Bernoulli.

(b) Determine a solução da equação (**??**).

8. Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = f(t),$$

onde a e f são funções contínuas em $\mathbb{R}$ que verificam

$$a(t) > c > 0 \quad \forall t \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = 0.$$

Mostre que qualquer solução da equação diferencial satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Soluções

1. a) $\operatorname{arc\,tg}(t)+C$; b) Ce^{-e^t}; c) $2x+Ce^{-x}$; d) $t+1+Ce^t$; e) $\frac{e^x(x-2)^2+C}{x^2}$;
f) $Ce^{6t}-\frac{\cos(2t)+3\operatorname{sen}(2t)}{2}$; g) $t(t+C)\cos(t)$; h) $\operatorname{arc\,tg}(y)-1+Ce^{-\operatorname{arc\,tg}(y)}$.
(em todos os casos, $C\in\mathbb{R}$).

2. a) $x^2(e^x-e)$; b) $\frac{u+1}{u^2+1}$; c) $x(t)=\begin{cases}\frac{t^2+3}{2} & \text{se} \quad t\leqslant 0\\ 1+\frac{1}{2}e^{-t^2/2} & \text{se} \quad t>0\end{cases}$.

3. A temperatura do corpo no instante t (medido em horas), $T(t)$ verifica a equação diferencial $T'(t)=k\big(T(t)-30\big)$.
Resposta: $t=-\frac{\log 7}{4\log(4/7)}=\frac{1}{4(1-\log 4/\log 7)}\approx 0,8693\text{h}\approx 52\text{m}.$

4. $y(x)=\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3x}+Cx^2\right)+2\pi k$ ou $y(x)=\pi-\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3x}+Cx^2\right)+2\pi k$, com $k\in\mathbb{Z}$ e C uma constante real.

5. (a) $y(t)=\pm\sqrt{\frac{5t}{2+5ct^5}}$, onde c é uma constante real;
(b) $y(t)=\sqrt{\frac{5t}{2+3t^5}}$ em $]0,+\infty[$; (c) $\frac{dy}{dt}=(1-n)\alpha(t)y+(1-n)\beta(t)$.

6. (a) $y(t)=\sqrt{\frac{20t}{8-3t^5}}$;
(b) $y(t)=\frac{1}{t(\log t+1)}$.

7. (a) $\frac{d\psi}{dt}=-\left(\frac{2}{t}+1\right)\psi-\psi^2$; (b) $x(t)=\frac{1}{t}+\psi(t)=\frac{1}{t}+\left(t^2e^t\left(\mathrm{P}\left[\frac{e^{-t}}{t^2}\right]+C\right)\right)^{-1}$, $C\in\mathbb{R}$.