TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2019/2020

Ficha 7: Séries de Laurent. Singularidades, teorema dos resíduos e aplicações.

1. Determine a série de Laurent da função $f(z)$ na vizinhança do ponto z_0, isto é, válida em $0 < |z - z_0| < R$, indicando o valor de R;

(i) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2}, \quad z_0 = 0;$ (ii) $f(z) = z^3 e^{1/z}, \quad z_0 = 0;$

(iii) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}, \quad z_0 = 0;$ (iv) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z - 2}, \quad z_0 = 2.$

2. Determine a série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

válida em

(i) $\{z \ : \ 2 < |z| < 3\};$ (ii) $\{z \ : \ 3 < |z| < +\infty\}.$

3. Determine a série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$$

válida em

(i) $\{z \ : \ 0 < |z - \mathrm{i}| < 2\};$ (ii) $\{z \ : \ |z - \mathrm{i}| > 2\}.$

Aproveite os anteriores desenvolvimentos em série para calcular

(iii) $\oint_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^3}\, dz;$ (iv) $\oint_{|z-\mathrm{i}|=3} f(z)\, dz,$

onde as curvas são percorridas uma vez em sentido directo.

4. Classifique a singularidade z_0 da função $f(z)$

(i) $f(z) = \dfrac{1}{z - \operatorname{sen} z}, \quad z_0 = 0;$ (ii) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{e^{-z} + z - 1}, \quad z_0 = 0;$

(iii) $f(z) = \dfrac{1 + \cos z}{z - \pi}, \quad z_0 = \pi;$ (iv) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{z}, \quad z_0 = 0;$

(v) $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}, \quad z_0 = 0;$ (vi) $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}, \quad z_0 = -1.$

5. Determine e classifique todas as singularidades das seguintes funções:

(i) $f(z) = \dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} z}$; (ii) $f(z) = \cos\,(z^{-1})$; (iii) $f(z) = \dfrac{1}{e^{-z} - 1} + z^{-2}$.

6. Calcule $\operatorname{Res}\,(f, z_0)$

(i) $f(z) = \dfrac{z^{n-1}}{\operatorname{sen}^{n} z}$, $z_0 = 0$, $n = 1, 2, \dots$; (ii) $f(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{(1 - \cos 2z)\operatorname{sen} z}$, $z_0 = 0$;

(iii) $f(z) = \dfrac{z^{n-2}}{\operatorname{sh}^{n} z}$, $z_0 = 0$, $n = 1, 2, \dots$;

7. Calcule os resíduos da função $f(z)$ nas suas singularidades

(i) $f(z) = \dfrac{\operatorname{cotg} z}{z^2 - \pi z/4}$; (ii) $f(z) = z^3 e^{1/z}$; (iii) $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)}$;

(iv) $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z - \mathrm{i}}$; (v) $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{z+1}$.

8. Calcule os integrais, onde as curvas são percorridas uma vez em sentido directo

(i) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 - 6z}\,dz$; (ii) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen}\,(iz)}{z^2 - 4z + 3}\,dz$;

(iii) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z e^{1/(z+2)}}\,dz$; (iv) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\cos\,(iz)}{z^3}\,dz$;

(v) $\displaystyle\oint_{\gamma} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)}\,dz$, $\gamma = \big\{z = x + \mathrm{i}y : x^{2/3} + y^{2/3} = 3^{2/3}\big\}$;

(vi) $\displaystyle\oint_{\gamma} \frac{\cos\,(z/2)}{z^2 - 4}\,dz$, $\gamma = \big\{z = x + \mathrm{i}y : x^2/9 + y^2/4 = 1\big\}$;

(vii) $\displaystyle\oint_{\gamma} \frac{e^{2z}}{z^3 - 1}\,dz$, $\gamma = \big\{z = x + \mathrm{i}y : x^2 + y^2 - 2x = 0\big\}$.

9. Calcule os seguintes integrais:

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$; (ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$; (iii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,\mathsf{sen}\,ax}{x^2+1}\,dx,\ a>0$;

(iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx$; (v) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2p\cos x+p^2}\,dx, \quad 0<p<1$;

(vi) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+\mathsf{sen}^2\theta}\,d\theta$; (vii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos^4 x}{1+\mathsf{sen}^2 x}\,dx$.

10. Calcule $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+1}\,dx$ do seguinte modo: sendo $r>0$, escrevemos C_r para a semicircunferência

$$C_r = \{z\in\mathbb{C} : |z| = r,\ \operatorname{Im}(z)\geqslant 0\},$$

e, para $a,b\in\mathbb{R}$, escrevemos $[a,b] = \{t+0\,\mathrm{i}\in\mathbb{C} : a\leqslant t\leqslant b\}$. Seja $\sqrt[4]{z}$ a função raíz quarta que toma valores no primeiro quadrante. Dados $0<\epsilon<R$, considere a curva

$$\gamma_{\epsilon,R} = C_R \cup [-R,-\epsilon] \cup -C_\epsilon \cup [\epsilon, R]$$

percorrida uma vez no sentido directo. Comece por mostrar que $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} \frac{\sqrt[4]{z}}{z^2+1}\,dz = 0$ e que $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{\sqrt[4]{z}}{z^2+1}\,dz = 0$. Finalmente, calcule $\displaystyle\oint_{\gamma_{\epsilon,R}} \frac{\sqrt[4]{z}}{z^2+1}\,dz$ para $0<\epsilon<1<R$.

11. Use as curvas $\gamma_{\epsilon,R}$ definidas na pergunta anterior e o teorema dos residuos para calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathsf{sen}\,x}{x}\,dx.$$

12. Seja $f(z)$ uma função analítica no conjunto $A = \mathbb{C}\setminus\{z_1,\dots,z_n\}$. Observe que a função $F(z) = -\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})$ possui uma singularidade isolada em $z=0$. Define-se o **resíduo de f em** ∞ por:

$$\operatorname{Res}(\mathrm{f},\infty) = \operatorname{Res}(\mathrm{F},0).$$

Mostre que se $\gamma\subset A$ é uma curva simples, fechada, percorrida no sentido directo, que contém os pontos $\{z_1,\dots,z_n\}$ no seu interior, então:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = -2\pi\mathrm{i}\,\operatorname{Res}(\mathrm{f},\infty).$$

Aproveite o resultado para calcular

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^3e^{1/z}}{z^3+1}dz$$

onde a curva é percorrida uma vez em sentido directo.

13. Seja F uma função inteira tal que

$$f(z) = F\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

tem um pólo. Mostre que $F(z)$ é um polinómio.

14. Suponha que $f(z)$ é uma função analítica com uma singularidade essencial em $z = z_0$. Este exercício mostra que para todo o número complexo $a \in \mathbb{C}$, existe uma sucessão z_n convergente para z_0 tal que $f(z_n)$ converge para a. Em particular, não existe o limite $\lim_{z \to z_0} f(z)$.

(a) Use as fórmula integrais para os coeficientes da série de Laurent, em torno de z_0, para mostrar que se $g(z)$ tem uma singularidade isolada em z_0 e é limitada numa vizinhança de z_0 então z_0 é uma singularidade removível de $g(z)$.

(b) Assumindo que existe um número complexo $a \in \mathbb{C}$ tal que a condição do enunciado não se verifica, mostre que a função $g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$ é limitada numa vizinhança de $z = z_0$.

(c) Mostre que se $g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$ tem uma singularidade removível em z_0 então $f(z)$ tem, ou um pólo, ou uma singularidade removível em z_0.

Soluções

1. (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}$ para $0 < |z| < \infty$; (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n+3}}{n!}$ para $0 < |z| < \infty$;

   (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{2n-2}$ para $0 < |z| < \infty$;

   (iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2}{(2n+1)!}(z-2)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen} 2}{(2n)!}(z-2)^{2n-1}$ para $0 < |z-2| < \infty$.

2. (i) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$; (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{z^{n+1}}$;

3. (i) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{(2i)^{n+1}}(z-i)^{n-3}$;

   (ii) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^n (2i)^n}{(z-i)^{n+4}}$;

   (iii) $\oint_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^3}\, dz = -\frac{5\pi \mathrm{i}}{32}$;

   (iv) $\oint_{|z-i|=3} f(z)\, dz = 0$.

4. (i) Pólo de ordem 3; (ii) Pólo simples; (iii) Singularidade removível;

   (iv) Singularidade removível; (v) Pólo de ordem 4; (vi) Pólo simples.

5. (i) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$ (pólos de ordem 2); (ii) 0 (singularidade essencial);

   (iii) 0 (pólo de ordem 2) e $2k\pi\mathrm{i}$, para qualquer $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (pólos simples).

6. (i) Pólo simples e $\operatorname{Res}(f,0) = 1$; (ii) Pólo simples e $\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{4}$;

   (iii) Pólo de ordem 2 e $\operatorname{Res}(f,0) = 0$.

7. (i) 0 é pólo de ordem 2 e $\operatorname{Res}(f,0) = -\frac{16}{\pi^2}$;

   $\frac{\pi}{4}$ é pólo simples e $\operatorname{Res}(f,\frac{\pi}{4}) = \frac{4}{\pi}$;

   $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, são pólos simples e $\operatorname{Res}(f,k\pi) = \frac{4}{k\pi^2(4k-1)}$.

   (ii) 0 é singularidade essencial e $\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{4!}$.

   (iii) i é pólo simples e $\operatorname{Res}(f,\mathrm{i}) = \frac{\operatorname{ch} \mathrm{i}}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}-3)} = \frac{\cos 1}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}-3)}$;

   $-\mathrm{i}$ é pólo simples e $\operatorname{Res}(f,-\mathrm{i}) = \frac{\operatorname{ch} \mathrm{i}}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}+3)} = \frac{\cos 1}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}+3)}$;

   3 é pólo simples e $\operatorname{Res}(f,3) = \frac{\operatorname{ch} 3}{10}$.

   (iv) i é pólo simples e $\operatorname{Res}(f,\mathrm{i}) = -1$.

   (v) -1 é pólo simples e $\operatorname{Res}(f,-1) = e^{-1}$;

   0 é singularidade essencial e $\operatorname{Res}(f,0) = 1 - e^{-1}$.

8. (i) $-\frac{\pi \mathrm{i}}{3}$; (ii) $\pi \operatorname{sh} 1$; (iii) 0; (iv) $\pi\mathrm{i}$; (v) 0; (vi) 0; (vii) $\frac{2\pi \mathrm{i} e^2}{3}$.

9. (i) $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$; (ii) $\frac{3\pi}{8}$; (iii) $\frac{\pi}{2e^a}$; (iv)$\frac{\pi}{e}$; (v) $\frac{2\pi}{1-p^2}$ (vi) $\pi\sqrt{2}$; (vii) $\frac{\pi}{2}(4\sqrt{2}-5)$.

10. O integral ao longo de $\gamma_{\epsilon,R}$ é $\pi e^{i\frac{\pi}{8}}$ e $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+1}\, dx = \pi \frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}}{1+e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \frac{2\pi}{2+\sqrt{2}} \cos\frac{\pi}{8}$.

11. $\frac{\pi}{2}$.