Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2019/2020

Ficha 6: Séries numéricas, séries de potências. Séries de Taylor

1. Suponha que lhe emprestam T euros a um juro anual de $r\%$ (o que corresponde a um juro mensal de $\left(\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{1}{12}}-1\right)\times 100\%$). O empréstimo deverá ser pago em N prestações mensais todas iguais, a primeira das quais será paga 1 mês depois de lhe ter sido concedido o empréstimo. Qual será o valor da prestação mensal?

2. Determine se as seguintes séries convergem ou não.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^4+n+1}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\mathrm{i})^n}{2^{n/2}}$; (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n\mathrm{i}}}{n\sqrt{n}}$;

(v) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}$; (vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^{n^3}}$; (vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi/n)}{n^{\log n}}$; (viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cos n}{n^4+1}$.

3. Determine para quais valores de z, as seguintes séries convergem absolutamente

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^n}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$; (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(z^n+z^{-n})$.

4. Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n^3}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^{5n}$; (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{\mathrm{i}n}(z-\mathrm{i})^n$;

(iv) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{(\mathrm{i}n)^n}$; (v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^n z^n$.

5. Se a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ tem raio de convergência R, determine os raios de convergência das séries:

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}a_n^5 z^n; \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^{2n+3}.$$

6. Determine as séries de MacLaurin das seguintes funções indicando o domínio de validade:

(i) $\dfrac{1}{2z+5}$; (ii) $\dfrac{1}{z^4+1}$; (iii) e^{-z^2}; (iv) $\dfrac{z^2}{(1+z)^2}$; (v) $\operatorname{sen}(z^2/3)$;

(vi) $(1+z)e^{-z}$; (vii) $\dfrac{5z-4}{z+2}$; (viii) $\dfrac{1}{z^2-2z-3}$; (ix) $\dfrac{1}{(1-z^3)^2}$.

7. Determine a série de Taylor na vizinhança do ponto z_0, indicando o respectivo domínio de validade:

(i) $\dfrac{1}{1-z}$, $z_0 = 1 - \mathrm{i}$; (ii) $\dfrac{1}{z(z+2)}$, $z_0 = \mathrm{i}$;

(iii) $\dfrac{1}{z^3-2z^2+z}$, $z_0 = 2$; (iv) $z\cos(z+1)$, $z_0 = -1$;

(v) $\log(z^2+2z+2)$, $z_0 = -1$ (com log a função logaritmo determinada pelo valor principal do argumento).

8. Considere a função

$$f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen}^2 z}.$$

Sem calcular os seus coeficientes, indique justificadamente qual o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $z-2$.

9. Considere a função $f(z) = \frac{1}{1-2z}$, definida em $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ e $g(z) = e^{-(z-\mathrm{i})}$, definida em $\mathbb{C}$.

(a) Determine o desenvolvimento de $f+g$ em série de Taylor centrada em i e determine o seu raio de convergência.

(b) Aproveite os cálculos da alínea anterior para determinar $f^{(7)}(\mathrm{i})$.

Soluções

1. $\dfrac{T\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{N}{12}}\left(1-\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{1}{12}}\right)}{1-\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{N}{12}}}$.

2. (i) Sim; (ii) Sim; (iii) Não; (iv) Sim;
   (v) Não; (vi) Sim; (vii) Sim; (viii) Sim.

3. (i) $|z+1|<2$; (ii) $\operatorname{Re} z>0$; (iii) $|z|=1$.
4. (i) 1; (ii) 1; (iii) 1; (iv) $+\infty$; (v) 0.
5. (a) R^5; (b) $\sqrt{R}$.

6. (i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{5^{n+1}}z^n, \quad |z|<\frac{5}{2}$;

   (ii) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{4n}, \quad |z|<1$

   (iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{2n},\ z\in\mathbb{C}$;

   (iv) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nz^{n+1}, \quad |z|<1$;

   (v) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{2n+1}(2n+1)!}z^{4n+2}, \quad z\in\mathbb{C}$;

   (vi) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}\,z^n, \quad z\in\mathbb{C}$;

   (vii) $-2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7(-1)^{n+1}}{2^n}z^n, \quad |z|<2$;

   (viii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left((-1)^{n+1}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n, \quad |z|<1$;

   (ix) $\sum_{n=1}^{\infty}nz^{3n-3}, \quad |z|<1$.

7. (i) $\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^{-n-1}(z-1+\mathrm{i})^n, \quad |z-1+\mathrm{i}|<1$;

   (ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{i}^{n+1}}-\frac{1}{(2+\mathrm{i})^{n+1}}\right)(z-\mathrm{i})^n, \quad |z-\mathrm{i}|<1$;

   (iii) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}+n\right)(z-2)^n, \quad |z-2|<1$;

   (iv) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z+1)^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(z+1)^{2n}, \quad z\in\mathbb{C}$;

   (v) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(z+1)^{2n+2}, \quad |z+1|<1$.

8. O raio de convergência é $\pi - 2$.

9. (a) $(f+g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{(1-2\mathrm{i})^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{n!} \right) (z-\mathrm{i})^n, \quad |z-\mathrm{i}| < \frac{\sqrt{5}}{2}$.

(b) $f^{(7)}(\mathrm{i}) = \dfrac{2^7 7!}{(1-2\mathrm{i})^8}$.