

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2019/2020

Ficha 5: Teorema de Cauchy. Fórmulas integrais de Cauchy.

1. Para $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, designa-se por $\gamma(a, r)$ o caminho $\gamma(t) = a + re^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$.
 Calcule $\oint_{\gamma(a,r)} (z^2 + 1)^{-1} dz$ para:
 - (i) $\gamma(1, 1)$; (ii) $\gamma(i, 1)$; (iii) $\gamma(-i, 1)$; (iv) $\gamma(0, 2)$; (v) $\gamma(3i, \pi)$.

2. Determine se as seguintes funções são primitiváveis no domínio indicado e em caso afirmativo determine uma primitiva.
 - (a) $z^2 e^z$, em \mathbb{C} ; (b) $\frac{\cos z}{z}$, em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;

 - (c) $f(x + iy) = 3y + x^2 - y^2 + i(2xy - 3x)$, em \mathbb{C} ;

 - (d) $\frac{1}{z(z-1)}$, em $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$; (e) $\frac{1}{z(z-1)}$, em $\mathbb{C} \setminus \{x + 0i : 0 \leq x \leq 1\}$.

3. Calcule os integrais

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz & \text{(ii)} \quad & \oint_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z}{(z^2 - 1)^2} dz & \text{(iii)} \quad & \oint_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch}(e^{i\pi z})}{z^3 - 4z^2} dz \\
 \text{(iv)} \quad & \oint_{|z|=1/2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{z+1}\right)}{z^3} dz
 \end{aligned}$$

4. Determine todos os valores possíveis do integral

$$I = \oint_C \frac{z \cos z}{z^2 + 1} dz$$

onde C é uma qualquer curva de Jordan, seccionalmente regular, contida em $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.

5. Sendo $\log z$ a função logaritmo determinada pela escolha do argumento no intervalo $[0, 2\pi[$ e $z^{-1+i} = \exp[(-1+i)\log z]$, calcule

$$\oint_{|z|=1} z^{-1+i} dz,$$

onde a curva é percorrida no sentido positivo.

6. Considere a função complexa definida por

$$f(z) = f(x + iy) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y + i(x^2 - y^2 + 2xy - 2x).$$

Justificando pormenorizadamente a sua resposta, determine o valor do integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2} dz,$$

onde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 4\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

7. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e considere a função $u(x, y) = x^3\lambda^3 - 3xy^2\lambda$.

(i) Determine para que valores de λ a função u é harmónica.

(ii) Considere $\lambda = 1$. Determine uma função holomorfa f tal que $f(0) = i$ e a parte real de f é u .

(iii) Calcule o integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^4} dz$$

onde C é a circunferência de centro na origem e raio 1 percorrida uma vez no sentido directo.

8. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função inteira e tal que $f(0) = i$. Calcule

$$\int_0^{2\pi} f(4e^{it}) dt.$$

9. a) Demonstre o *Teorema de Liouville*: Mostre que se f é inteira e limitada então f é constante em \mathbb{C} .

Sugestão: Utilize a fórmula integral de Cauchy para mostrar que $f'(z) = 0$.

b) Mostre que, se f é inteira e existem $M \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que para cada $z \in \mathbb{C}$ se tem $|f(z)| \leq M(1 + |z|^n)$, então f é um polinómio de grau menor ou igual que n .

10. Considere um caminho fechado $z : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ cuja imagem γ não contém o número complexo a , e a função $h : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$h(t) = \int_{\alpha}^t \frac{z'(s)}{z(s) - a} ds.$$

(i) Verifique que

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-h(t)} (z(t) - a) \right) = 0 \quad , \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

(ii) Usando o facto do caminho ser fechado, mostre que $e^{h(\beta)} = 1$.

(iii) Conclua que o índice de γ relativo a a , que é dado por

$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz,$$

é um número inteiro. Intuitivamente, o índice é o “número de voltas” que o caminho γ dá em torno do ponto a , contadas positivamente no sentido directo e negativamente no sentido horário.

Soluções

- (i) 0; (ii) π ; (iii) $-\pi$; (iv) 0; (v) π .
- (a) Uma primitiva é $z^2e^z - 2ze^z + 2e^z$; (b) Não é primitivável;
(c) Uma primitiva é $f(x + iy) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + 3xy + i\left(x^2y - \frac{y^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2\right)$;
(d) Não é primitivável;
(e) Uma primitiva é $\log(z-1) - \log(z)$ onde \log denota a função logaritmo determinada pela escolha do argumento principal.
- (i) $-\pi i$; (ii) 0; (iii) $\frac{\pi^2 \operatorname{sh} 1}{2}$; (iv) $\pi^3 i$.
- $0, \pm\pi i \operatorname{ch} 1, \pm 2\pi i \operatorname{ch} 1$.
- $i(1 - e^{-2\pi})$.
- $-4\pi + 8\pi i$.
- (i) $\lambda = 0, \pm 1$; (ii) $f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + 1)$; (iii) $2\pi i$.
- $2\pi i$.