

## Análise Complexa e Equações Diferenciais

### 1º Semestre 2019/2020

#### Ficha 4: Funções Harmónicas. Integração em $\mathbb{C}$ .

1. Determine uma harmónica conjugada de cada uma das funções:

(i)  $u(x, y) = xy^3 - x^3y + 2x + 1$       (ii)  $u(x, y) = e^{2x} \cos(2y)$

(iii)  $u(x, y) = \log\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + 2y$       (iv)  $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

2. Poderá existir uma função analítica em  $\mathbb{C}$  cuja parte real seja  $u(x, y) = e^y x + e^x y$  ?

3. Este exercício ilustra (em casos muito simples) a maneira como podemos usar a análise complexa para resolver a equação de Laplace. Determine uma solução da equação de Laplace (isto é, uma função harmónica) que satisfaça as seguintes condições:

(a)  $u$  está definida em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,

$$u(x, y) = x + 5 \text{ para } x^2 + y^2 = 1, \text{ e } \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} u(x, y) = 5.$$

**Sugestão:** Considere a função  $f(z) = \frac{1}{z}$ .

(b)  $u$  está definida em  $\mathbb{R}^2$ ,  $u(0, 0) = 1$ ,  $u(1, 0) = 1$ ,  $u(0, 1) = 3$ .

(c)  $u$  está definida em  $\mathbb{R}^2$  e  $u(x, 0) = e^x$ .

4. Calcule

$$\int_{\gamma} \operatorname{Im} z^2 dz,$$

onde  $\gamma$  é a curva que une 0 a  $2 + 4i$  ao longo:

(a) do segmento de recta (cujos extremos são aqueles dois pontos);

(b) do eixo real até 2 e depois de um segmento vertical até  $2 + 4i$ ;

(c) da parábola  $y = x^2$ .

5. Calcule o integral  $\int_{\gamma} f(z) dz$ , onde:

(i)  $f(z) = e^{|z|^2} \operatorname{Re} z$  e  $\gamma$  é o segmento de recta que une os pontos 0 e  $1 + i$ ;

(ii)  $f(z) = z \operatorname{Im} z^2$  e  $\gamma = \{z : |z| = 1, -\pi \leq \arg z \leq 0\}$  percorrido no sentido directo;

(iii)  $f(z) = z\bar{z}$  e  $\gamma = \{z : |z| = 1\}$  percorrido no sentido horário;

(iv)  $f(z) = 1/z$  e  $\gamma(t) = e^{it}$ , com  $t \in [0, 8\pi]$  percorrido no sentido horário;

(v)  $f(z) = e^z$  e  $\gamma$  é a concatenação de segmentos de recta  $[0, 1] \cup [1, 1 + i] \cup [1 + i, i]$ .

6. Calcule o integral  $\int_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{z}} dz$ , onde:

- (i)  $\gamma = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$  percorrido no sentido directo e se escolhe uma função  $\sqrt{z}$  que é contínua sobre  $\gamma$  e verifica  $\sqrt{1} = 1$ ;  
 (ii)  $\gamma = \{z : |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$  percorrido no sentido horário e se escolhe uma função  $\sqrt{z}$  que é contínua sobre  $\gamma$  e verifica  $\sqrt{-i} = (1-i)/\sqrt{2}$ .

7. Mostre que:

$$(i) \left| \oint_{|z-1|=2} \frac{1}{z} dz \right| \leq 4\pi; \quad (ii) \left| \oint_{|z|=R} \frac{z-1}{z+1} dz \right| \leq 2\pi \frac{R(R+1)}{R-1} \quad \text{para } R > 1;$$

$$(iii) \left| \oint_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^4} dz \right| \leq \pi R^{-3} \text{ em que } \gamma(t) = Re^{it} \text{ e } t \in [0, \pi].$$

8. Considere o caminho  $\gamma : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  definido por  $\gamma(\theta) = e^{-\theta+i\theta}$ .

- (a) Esboce  $\gamma$ .  
 (b) Calcule  $\int_{\gamma} z dz$ .

9. Considere as coordenadas polares usuais  $(r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[$ , no conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ , determinadas pelas relações

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \operatorname{sen} \theta. \end{cases}$$

Este exercício vai deduzir a expressão das equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.

(a) Seja  $A = \begin{bmatrix} u & w \\ v & x \end{bmatrix}$  uma matriz real  $2 \times 2$  e  $r > 0$ . Mostre que existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que

$$\begin{bmatrix} u & w \\ v & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

sse

$$u = \frac{x}{r} \quad \text{e} \quad w = -rv.$$

(b) Use a regra da derivação da função composta para mostrar que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}.$$

(c) Conclua que uma função  $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

com  $u$  e  $v$  de classe  $C^1$  em  $]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[$  é diferenciável em  $re^{i\theta}$  sse são satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}.$$

- (d) Mostre que se  $f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$  é diferenciável no ponto  $(r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[$  então

$$f'(re^{i\theta}) = \left( \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) e^{-i\theta}.$$

- (e) Aproveite o resultado das alíneas anteriores para determinar o domínio de diferenciabilidade das seguintes funções (tomando coordenadas polares  $(r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[$ ) e calcular a derivada nos pontos desse domínio.

- (i)  $f(z) = \log z$ , a função logaritmo determinada pela escolha do argumento principal.
- (ii)  $f(re^{i\theta}) = -r^3\theta + i(\theta^3 + r^2)$ .
- (iii)  $f(re^{i\theta}) = \log r + r\cos \theta + i(r\sin \theta - r\theta)$ .

## Soluções

- (i)  $v(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{4} - \frac{3x^2y^2}{2} + 2y$ ;    (ii)  $v(x, y) = e^{2x} \operatorname{sen}(2y)$ ;

(iii)  $v(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - 2x$  para  $x \neq 0$ , (não existe uma harmónica conjugada em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ );

(iv)  $v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ .
- Não.
- (a)  $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + 5$ .

(b)  $u(x, y) = 1 + x + 2y$ , por exemplo. Usando funções holomorfas pode, por exemplo, tomar-se  $u(x, y) = \operatorname{Re}\left(-i(z-1)(z-i) + \frac{2}{1-i}z(z-i) - \frac{3}{1+i}z(z-1)\right)$ .

(c)  $u(x, y) = e^x \cos(y)$ .
- (a)  $\frac{16}{3}(2 + 4i)$     (b)  $32i$     (c)  $8 + \frac{128}{5}i$
- (i)  $\frac{1+i}{4}(e^2 - 1)$     (ii)  $-\frac{\pi}{2}$     (iii)  $0$     (iv)  $-8\pi i$     (v)  $-1 + \cos 1 + i \operatorname{sen} 1$
- (i)  $2(i - 1)$ ;    (ii)  $i2\sqrt{2}$ .
- (a) Trata-se de uma espiral com extremidades em 1 e em 0.    b)  $-\frac{1}{2}$ .
- (e) (i) Diferenciável em  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ .    (ii) Diferenciável em  $z = 2$ .

(iii) A função não é diferenciável em qualquer ponto.