

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2019/2020

Ficha 3: Diferenciabilidade complexa e holomorfia.

1. Determine ou mostre que não existe cada um dos seguintes limites.

$$(i) \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}; \quad (ii) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}; \quad (iii) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{|z|}; \quad (iv) \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2.$$

2. Determine o domínio de diferenciabilidade de cada uma das seguintes funções e calcule a derivada nesse domínio.

$$(i) f(z) = z^2 \bar{z}; \quad (ii) f(x + iy) = xy - ix; \quad (iii) f(z) = \cos(3z) - i;$$
$$(iv) f(z) = |z| \bar{z}; \quad (v) f(x + iy) = x^2 - y + i(x - y^2);$$
$$(vi) f(z) = e^{\bar{z}}; \quad (vii) f(z) = z^5 + \operatorname{sh}(e^{z^2}); \quad (viii) f(z) = \bar{z} \operatorname{Im} z.$$

3. Indique o domínio de analiticidade das funções do exercício anterior.

4. Calcule as derivadas das seguintes funções. Nas funções que envolvam a utilização do logaritmo considere o valor principal e indique a região em que a fórmula obtida é válida.

$$(i) \operatorname{sen}(z) + 3z^2 - ze^{z^3}; \quad (ii) f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{C};$$
$$(iii) \cos(z) + (2z + 1)^z; \quad (iv) f(z) = \log(z^2 + iz);$$

5. Considere a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = f(x + iy) = x^2 - y^2 + 2i|xy|$.

(a) Estude a analiticidade de $f(z)$.

(b) Calcule $f'(z)$ nos pontos onde f é analítica.

6. Sejam $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, funções diferenciáveis, e $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a função definida por

$$f(x + iy) = \alpha(x) - 3xy^2 + i(3x^2y + \beta(y))$$

para $x, y \in \mathbb{R}$. Decida se pode ou não escolher α, β de modo a que f seja uma função inteira (isto é, holomorfa em \mathbb{C}). Em caso afirmativo, determine α, β de maneira a que $f(1) = i$ e $f(i) = -1$.

7. Considere a função $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = z(z^2 + (\bar{z})^2 - |z|^2),$$

e sejam u e v funções de \mathbb{R}^2 para \mathbb{R} tais que $u(x, y) = \operatorname{Re} g(x+iy)$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} g(x+iy)$.

- Determine o conjunto dos pontos onde u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. O que pode concluir sobre a holomorfia da função g ?
- Determine uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa em \mathbb{C} tal que $\operatorname{Re} f = u$.

8. Considere a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

Mostre que f verifica as condições de Cauchy-Riemann no ponto $z = 0$, mas não admite derivada nesse ponto.

9. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa tal que se verifica uma das condições

- $\operatorname{Re} f(z) \equiv (\text{constante})$,
- $f'(z) \equiv 0$,
- $|f(z)| \equiv (\text{constante})$.

Mostre que $f(z) \equiv (\text{constante})$.

10. Atendendo a que se $z = x + iy$ então $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, dada uma função \mathbb{R} -diferenciável $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, representada na forma $f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$, podemos sempre escrevê-la como função de z e \bar{z} .

a) Utilize o teorema da derivada da função composta para mostrar que:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

b) Mostre que f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann se e só se:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Nota: Este exercício mostra que as funções holomorfas são as que não dependem efectivamente de \bar{z} (no sentido de que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$).

Soluções

1. (i) i ; (ii) Não existe; (iii) 0 ; (iv) Não existe.
2. (i) $D_{\text{dif}} = \{0\}$, $f'(0) = 0$; (ii) $D_{\text{dif}} = \{1\}$, $f'(1) = -i$;
 (iii) $D_{\text{dif}} = \mathbb{C}$, $f'(z) = -3\text{sen}(3z)$; (iv) $D_{\text{dif}} = \{0\}$, $f'(0) = 0$;
 (v) $D_{\text{dif}} = \{x - ix \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}\}$, $f'(x - ix) = 2x + i$, para $x \in \mathbb{R}$; (vi) $D_{\text{dif}} = \emptyset$;
 (vii) $D_{\text{dif}} = \mathbb{C}$, $f'(z) = 5z^4 + 2ze^{z^2} \text{ch}(e^{z^2})$; (viii) $D_{\text{dif}} = \{0\}$; $f'(0) = 0$;
3. (i) \emptyset ; (ii) \emptyset ; (iii) \mathbb{C} ; (iv) \emptyset ; (v) \emptyset ; (vi) \emptyset ; (vii) \mathbb{C} ; (viii) \emptyset .
4. (i) $\cos(z) + 6z - (1 + 3z^3)e^{z^3}$; (ii) $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$;
 (iii) $-\text{sen}(z) + 2z(2z+1)^{z-1} + (2z+1)^z \log(2z+1)$ em $\mathbb{C} \setminus \{x + 0i : x \leq -\frac{1}{2}\}$;
 (iv) $f'(z) = \frac{2z+i}{z^2+iz}$ em $\mathbb{C} \setminus \{iy : y \geq 0 \text{ ou } y \leq -1\}$.
5. Analítica em $D = \{x + iy \in \mathbb{C} : xy > 0\}$; para $z \in D$, $f'(z) = 2z$.
6. $\alpha(x) = x^3 - 1$, $\beta(y) = -y^3 + 1$.
7. (a) Condições de Cauchy-Riemann são verificadas em $\{(0, 0)\}$; g não é holomorfa.
 (b) $f(x + iy) = u(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ aonde $\tilde{v}(x, y) = 3x^2y - y^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$.
8. Calculando as derivadas parciais pela definição, obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = 1$$

Por outro lado, utilizando a representação em coordenadas polares $h = |h|e^{i\theta}$

$$\lim_{\substack{|h| \rightarrow 0 \\ \theta = \alpha}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = e^{4i\alpha}$$