TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2019/2020

Ficha 2: Funções elementares, limites, continuidade

1. Determine se existem os limites das seguintes sucessões e em caso afirmativo calcule-as:

(i) $\lim \dfrac{\mathrm{i}^n}{n}$; (ii) $\lim \dfrac{n+2\mathrm{i}}{7+3n\mathrm{i}}$; (iii) $\lim \dfrac{1}{(2+3\mathrm{i})^n}$; (iv) $\lim \dfrac{n}{n+\mathrm{i}}$;

(v) $\lim \dfrac{\operatorname{sen}(n\mathrm{i})}{n}$; (vi) $\lim e^{n\mathrm{i}}$.

2. Esboce os conjuntos determinados pelas equações dadas e indique se são ou não abertos:

(i) $(1-2\mathrm{i})z+(1+2\mathrm{i})\bar{z}-2=0$; (ii) $|z| \leqslant \mathrm{Re}(z)+2$; (iii) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z-1}\right)=0$;

(iv) $|z|^2-(1-\mathrm{i})z-(1+\mathrm{i})\bar{z}+1=0$.

3. Escreva os seguintes números complexos na forma $a+\mathrm{i}b$:

(i) $e^{2+\mathrm{i}}$; (ii) $\cos(2+3\mathrm{i})$; (iii) $\operatorname{sh}(\frac{\pi}{2}\mathrm{i})$.

4. Determine a parte real e a parte imaginária de cada uma das seguintes funções:

(i) $\bar{z}+\mathrm{i}z^2$; (ii) $\mathrm{i}-z^3$; (iii) $\bar{z}/z$; (iv) sen (z).

5. Estabeleça as seguintes identidades, onde $z, w \in \mathbb{C}$:

(i) $\cos(\mathrm{i}z)=\operatorname{ch}(z)$; (ii) $\operatorname{sen}(\mathrm{i}z)=\mathrm{i}\operatorname{sh}(z)$; (iii) $\cos^2(z)+\operatorname{sen}^2(z)=1$;

(iv) $\operatorname{ch}^2(z)-\operatorname{sh}^2(z)=1$; (v) $\operatorname{sen}(z+w)=\operatorname{sen}(z)\cos(w)+\cos(z)\operatorname{sen}(w)$.

6. Calcule os conjuntos de números complexos determinados pelas seguintes expressões:

(i) $\operatorname{Log}(-e)$; (ii) $\operatorname{Log}(-\mathrm{i})$; (iii) $\operatorname{Log}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)$;

(iv) $2^{-\mathrm{i}}$; (v) i^{i}; (vi) $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{1+\mathrm{i}}$.

7. Resolva as seguintes equações:

(i) $e^z = -1$; (ii) $\log(\mathrm{i} - z) = \left(2 + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\pi$; (iii) $\operatorname{sen}(z) = 3\mathrm{i}$; (iv) $\overline{e^{\mathrm{i}z}} = e^{\mathrm{i}\bar{z}}$;

(v) $(z^4-1)\operatorname{sen}(\pi z) = 0$; (vi) $\operatorname{ch}^2(z) = 0$; (vii) $\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{z}\right) = 0$; (viii) $1+e^{z^2} = 0$.

8. Determine se as seguintes funções são contínuas na origem:

(i) $f(z) = \frac{z^2+3}{z^3-4}$;

(ii) $f(z) = \begin{cases} \frac{z \operatorname{sen} z}{|z|} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$; (iii) $f(z) = \begin{cases} z\, e^{\frac{1}{z}} & \text{se } z \neq 0, \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$

9. Calcule a imagem pelas funções indicadas dos seguintes conjuntos do plano complexo:

(i) $f(z) = z^2$, $S = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = \frac{\pi}{6}\}$;

(ii) $f(z) = \frac{1}{z-\mathrm{i}}$, $S = \{z \in \mathbb{C} : |z - \mathrm{i}| = 2\}$;

(iii) $f(z) = e^{2z}$, $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) \leqslant 1,\ \frac{\pi}{3} \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant \frac{2\pi}{3}\}$;

(iv) $f(z) = \log(z)$, $S = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < e,\ \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{7\pi}{4}\}$ onde log denota o valor principal do logaritmo;

(v) $f(z) = \frac{1}{z}$, $S = \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} = 2\}$;

(vi) $f(z) = \operatorname{ch}(z)$, $S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 1\}$.

10. Dado um número real $a \in [-1, 1]$, mostre que as equações $\operatorname{sen} z = a$ e $\cos z = a$ têm apenas soluções reais.

Soluções

1. (i) 0; (ii) $-\frac{1}{3}\,\mathrm{i}$; (iii) 0; (iv) 1; (v) ∞; (vi) não existe.

2. (i) A reta definida pela equação $x + 2y = 1$. Não é aberto.
(ii) A região do plano à direita da parábola $x = \frac{1}{4}y^2 - 1$ (incluindo a parábola). Não é aberto.
(iii) A reta definida pela equação $x + y = 1$. Não é aberto.
(iv) A circunferência de raio 1 centrada em $1 + \mathrm{i}$. Não é aberto.

3. (i) $e^2 \cos 1 + \mathrm{i}\, e^2 \operatorname{sen} 1$; (ii) $\cos 2 \operatorname{ch} 3 - \mathrm{i} \operatorname{sen} 2 \operatorname{sh} 3$; (iii) i .

4. (i) $\begin{cases} \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}\,y) = x - 2xy \\ \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}\,y) = x^2 - y^2 - y \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}\,y) = 3xy^2 - x^3 \\ \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}\,y) = 1 - 3x^2y + y^3 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}\,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \\ \\ \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}\,y) = \frac{-2xy}{x^2+y^2} \end{cases}$ (iv) $\begin{cases} \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}\,y) = \operatorname{sen}(x) \operatorname{ch}(y) \\ \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}\,y) = \cos(x) \operatorname{sh}(y) \end{cases}$

6. (i) $\{1 + \mathrm{i}\pi(1+2k) : k \in \mathbb{Z}\}$; (ii) $\{(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)\mathrm{i} : k \in \mathbb{Z}\}$; (iii) $\{(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi)\mathrm{i} : k \in \mathbb{Z}\}$;
(iv) $\{e^{2k\pi - \mathrm{i}\log 2} : k \in \mathbb{Z}\}$; (v) $\{e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} : k \in \mathbb{Z}\}$; (vi) $\{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}(1+\mathrm{i});\, k \in \mathbb{Z}\}$.

7. (i) $z = (2k+1)\mathrm{i}\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; (ii) $z = (1 - e^{2\pi})\,\mathrm{i}$;
(iii) $z = (2k+1)\pi - \mathrm{i}\log(\sqrt{10}+3)$ ou $z = 2k\pi - \mathrm{i}\log(\sqrt{10}-3),\ k \in \mathbb{Z}$:
(iv) $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (v) $z \in \mathbb{Z}$ ou $z = \pm\,\mathrm{i}$. (vi) $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}$.
(vii) $z = \frac{1}{k\pi},\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. (viii) $z = \pm\sqrt{(2k+1)\pi}\left(\frac{1\pm\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots$

8. (i) Sim; (ii) Sim; (iii) Não.

9. (i) $f(S) = \{w \in \mathbb{C} : \arg(w) = \frac{\pi}{3}\}$; (ii) $f(S) = \{w \in \mathbb{C} : |w| = \frac{1}{2}\}$;
(iii) $f(S) = \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| \leqslant e^2,\ \frac{2\pi}{3} \leqslant \arg(w) \leqslant \frac{4\pi}{3}\}$;
(iv) $f(S) = \{w \in \mathbb{C} : \log 2 < \operatorname{Re}(w) < 1$ e $\left(\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im}(w) \leqslant \pi \right.$ ou $\left. -\pi < \operatorname{Im}(w) < -\frac{\pi}{4}\right)\}$;
(v) $f(S) = \{w \in \mathbb{C} : \left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\}$;
(vi) $f(S)$ é a elipse com centro na origem, com semi-eixos paralelos aos eixos dos xx e yy e comprimentos respectivamente $\operatorname{ch} 1$ e $\operatorname{sh} 1$.