TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2019/2020

Ficha 13: Séries de Fourier e separação de variáveis

1. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

2. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } \operatorname{sen} x > 0 \\ 0 & \text{se } \operatorname{sen} x \leqslant 0 \end{cases}$$

5. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

6. Considere a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Determine:

(i) a série de senos associada a f;

(ii) a série de co-senos associada a f.

7. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \;\; x \in [0, \pi], \quad \text{com} \begin{cases} u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \operatorname{sen}(x) - 2\operatorname{sen}(5x). \end{cases}$$

8. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u, \;\; x \in [0, L], \quad \text{com} \begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \cos(3\pi x / L). \end{cases}$$

9. Seja a função f definida no intervalo $[0, \pi]$ por $f(x) = \text{sen}\,(x)$.

(a) Determine a série de Fourier de co-senos da função f.

(b) Diga, justificando, qual o valor da soma da série de Fourier da alínea anterior para cada x no intervalo $[-\pi, \pi]$.

(c) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,\pi]\,. \end{cases}$$

10. a) Determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0, \pi]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = (\pi - x)x\ .$$

11. Seja f a função definida no intervalo $[0, 2\pi]$ por $f(x) = x$.

(a) Determine a série de co-senos da função f.

(b) Resolva o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in\ [0,2\pi] \end{cases}$$

12. Resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \\ u(0,x) = 0\ ,\ u_t(0,x) = 1 \end{cases}$$

para $t \geqslant 0$, $x \in [0,1]$ e onde c é uma constante real positiva.

13. Resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ \ ,\quad x, y \in [0,1]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0\ \ ,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \cos\,(2\pi x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0\ \ ,\qquad \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = \cos\,(2\pi y)$$

14. Considere a equação de propagação do calor $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. $\quad (*)$

(a) Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é que não depende do tempo) da forma $u(x) = Ax + B$.

(b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$.

(c) Resolva a equação $(*)$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ e para as condições iniciais e de fronteira
$$\begin{cases} u(0,t) = 20 \\ u(1,t) = 60 \\ u(x,0) = 75. \end{cases}$$

15. a) Determine soluções, para $t \geqslant 0$ e $x \in [0,1]$, do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \\ u(0,t) = 0, \qquad \text{se } \ t \geq 0 \\ u(1,t) = \operatorname{sen} 1, \quad \text{se } \ t \geq 0 \end{cases}$$

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = 3\operatorname{sen}(2\pi x) - 7\operatorname{sen}(4\pi x) + \operatorname{sen}(x) \ .$$

16. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(t,x,0) = x \ , \quad u(t,x,1) = x \\ u(t,0,y) = 0 \ , \quad u(t,1,y) = 1 \\ u(0,x,y) = x \\ u_t(0,x,y) = \cos(2\pi(x-y)) - \cos(2\pi(x+y)) \end{cases} .$$
para $x, y \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}^+$.

Soluções

1. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\text{sen}\,((2n+1)\pi x)}{2n+1}$

2. $\frac{L}{2}+\frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)$. Fazendo $x=0$ obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3. $\frac{L^2}{3}+\frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Fazendo $x=L$ obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

4. $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\text{sen}\,x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos(2nx)$

5. $$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\,\text{sen}\,\big((2n-1)\pi x\big)=\begin{cases}1 & \text{se} \quad 0<x<1\\ 0 & \text{se} \quad x=0 \text{ ou } x=1\end{cases}$$

6. (i) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\text{sen}\,(n\pi x)$
   (ii) $\frac{1}{2}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)\pi x)$

7. $u(t,x)=e^{-\alpha^2 t}\,\text{sen}\,(x)-2e^{-25\alpha^2 t}\,\text{sen}\,(5\pi x)$

8. $u(t,x)=e^{-(1+9(\pi/L)^2)t}\cos(3\pi x/L)$

9. (a) $\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\cos(nx)=\frac{2}{\pi}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}\cos(2nx)\right)$

   (b) $|\text{sen}\,x|$ (c) $u(t,x)=\frac{2}{\pi}e^{2t}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2e^{(2-n^2)t}}{4n^2-1}\cos(2nx)$

10. (a) $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\,e^{-(1+n^2)t}\,\text{sen}\,(nx)$

    (b) $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}\,e^{-(1+n^2)t}\,\text{sen}\,(nx)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\left(1+(2n+1)^2\right)t}}{(2n+1)^3}\,\text{sen}\,((2n+1)x)$

11. (a) $f(x)=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi}\cos\left(\frac{n}{2}x\right)=\pi-\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$

    (b) $u(t,x)=\pi e^{-\frac{t^2}{2}}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\,e^{-\frac{n^2t+2t^2}{4}}\cos\left(\frac{n}{2}x\right)$

12. $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2 c}\,\text{sen}\,(n\pi ct)\,\text{sen}\,(n\pi x)$

13. $u(x,y)=C+\frac{\cosh(2\pi x)\cos(2\pi y)+\cosh(2\pi y)\cos(2\pi x)}{2\pi\,\text{senh}\,(2\pi)}$, $C\in\mathbb{R}$

14. (b) $u(x)=T_1+\frac{T_2-T_1}{L}x$

    (c) $20+40x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n\pi}\left(3(-1)^n+11\right)e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t}\,\text{sen}\,(n\pi x)$

15. (a) $u(t,x)=\text{sen}\,(x)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{(1-n^2\pi^2)t}\,\text{sen}\,(n\pi x)$ onde b_n são certos coeficientes reais.

    (b) $u(t,x)=\text{sen}\,(x)+3e^{(1-4\pi^2)t}\,\text{sen}\,(2\pi x)-7e^{(1-16\pi^2)t}\,\text{sen}\,(4\pi x)$

16. $u(t,x,y)=x+\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\,\text{sen}\,(2\sqrt{2}\pi t),\,\text{sen}\,(2\pi x)\,\text{sen}\,(2\pi y)$.