

Análise Complexa e Equações Diferenciais  
1º Semestre 2019/2020

**Ficha 12: Sistemas de equações de 1ª ordem e equações lineares de ordem  $n$  - caso geral**

1. Calcule  $e^{At}$  para as seguintes matrizes  $A$ .

$$(i) A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi \end{bmatrix}; \quad (ii) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad (iii) A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(iv) A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (v) A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (vi) A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

$$(vii) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad (viii) A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 2 \end{cases}$$

**Sugestão:** Determine uma solução particular constante.

3. Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + 2 \\ \dot{y} = 3x - y + 2 \\ \dot{z} = ty - tz \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais  $x(0) = y(0) = -1, z(0) = 1$ .

**Sugestão:** Note que as primeiras duas equações não contêm  $z$ .

4. Determine a solução geral de cada uma das equações:

$$(i) \quad y'' - 2y' - 3y = \cos t; \quad (ii) \quad y'' - 2y' + y = te^t;$$

$$(iii) \quad y^{(4)} + y = t + e^{2t} \sin t; \quad (iv) \quad y^{(3)} - 2y^{(2)} = t.$$

5. Determine a solução do problema de valor inicial

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y' - 2 = b(t) \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y^{(2)}(0) = 1$$

quando: (i)  $b(t) = 0$ ; (ii)  $b(t) = t$ ; (iii)  $b(t) = e^t$ .

6. Obtenha a solução geral dos seguintes sistemas:

$$(i) \quad \begin{cases} x' = y - 5e^{2t} \\ y' = 2x + y \end{cases} ; \quad (ii) \quad \begin{cases} x' = x + y + 1 + e^t \\ y' = 3x - y \end{cases} .$$

7. Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t\sqrt{2}} \\ e^{-t} \end{bmatrix}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

8. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & -2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

9. Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações.

(a)  $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$ ;

(b)  $y'' + 3y' + 2y = \text{sen}(e^t)$ .

10. Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + 3y' + 2y = (1 + e^x)^{-1}, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -\log 2.$$

11. Considere a equação diferencial

$$y'' + \frac{t}{1-t} y' + \frac{1}{1-t} y = 1 - \frac{1}{t}.$$

(a) Determine as soluções da equação homogênea da forma  $y(t) = t^k$  e  $y(t) = e^{\lambda t}$ .

(b) Determine a solução da equação que satisfaz as condições iniciais  $y(2) = 1$  e  $y'(2) = -1$ .

12. Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes  $n \times n$  de componentes reais ou complexas.

(a) Mostre que, se  $A$  e  $B$  comutam, então  $X(t) = e^{-At}e^{(A+B)t}$  satisfaz o problema de valor inicial  $\frac{dX}{dt} = BX$ ,  $X(0) = I$ .

(b) Conclua que se  $AB = BA$ , então  $e^{A+B} = e^A e^B$ .

(c) Aproveite o resultado para calcular  $e^{Ct}$ , onde  $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

13. Use a identificação das matrizes da forma  $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$  com os números complexos para calcular  $\exp\left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} t\right)$ .

14. A equação que a carga no condensador de um circuito LRC verifica é:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

em que  $q(t)$  é a carga acumulada no condensador no instante  $t$ ,  $L$  a indutância,  $R$  a resistência,  $C$  a capacidade do condensador e  $E(t)$  a diferença de potencial imposta no instante  $t$ .

(i) Determine a carga no condensador no instante  $t = 0,01$  s, de um circuito LRC com  $L = 0,05$  H (Henry),  $R = 2 \Omega$  (Ohm),  $C = 0,01$  F (farad) e

$$E(t) = 4,25 \text{ sen}(50t)$$

(correspondente a uma tensão de corrente alterna de 50 Hz e 4,25 V), sendo  $q(0) = 5$  C (Coulomb) e  $q'(0) = I(0) = 0$  A (Ampère).

(ii) Supondo que  $E(t) = 0$ , determine o primeiro instante em que a carga no condensador é igual a zero.

## Soluções

1. (i)  $\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\pi t} \end{bmatrix}$ ; (ii)  $\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$ ; (iii)  $e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;
- (iv)  $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{4t} - e^{2t} & -3e^{4t} + 3e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & -e^{4t} + 3e^{2t} \end{bmatrix}$ ; (v)  $e^{3t} \begin{bmatrix} \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t) & -2 \operatorname{sen}(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix}$ ;
- (vi)  $e^{4t} \begin{bmatrix} t+1 & -t & 0 \\ t & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; (vii)  $\begin{bmatrix} \cos t + \operatorname{sen} t & 2 \operatorname{sen} t & 0 \\ -\operatorname{sen} t & \cos t - \operatorname{sen} t & 0 \\ -\operatorname{sen} t & \cos t - \operatorname{sen} t - e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}$ ;
- (viii)  $\begin{bmatrix} e^{\pi t} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5}te^{\pi t} & e^{\pi t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & \sqrt{2}te^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$ .
2.  $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 + c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \operatorname{sen} t \\ 3/2 + c_1 e^t \operatorname{sen} t - c_2 e^t \cos t \end{bmatrix}$ .
3.  $x(t) = -1$ ,  $y(t) = -1$ ,  $z(t) = -1 + 2e^{t^2/2}$ .
4. (i)  $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{10}(\operatorname{sen} t + 2 \cos t)$  com  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (ii)  $y(t) = \left(c_1 + c_2 t + \frac{t^3}{6}\right)e^t$  com  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (iii)  $y(t) = \cos(\sqrt{2}t/2)(c_1 e^{\sqrt{2}t/2} + c_2 e^{-\sqrt{2}t/2}) + \operatorname{sen}(\sqrt{2}t/2)(c_3 e^{\sqrt{2}t/2} + c_4 e^{-\sqrt{2}t/2}) - \frac{e^{2t}}{102}(\operatorname{sen} t + 4 \cos t) + t$  com  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ ;
- (iv)  $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t} - \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{12}t^3$  com  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .
5. (i)  $y(t) = 5 - 5e^t + 3te^t + 2t$ ; (ii)  $y(t) = 8 - 8e^t + 4te^t + 4t + \frac{t^2}{2}$ ;
- (iii)  $y(t) = 4 - 4e^t + 2te^t + 2t + \frac{t^2}{2}e^t$ .
6. (i)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{3}(3c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{2t} - 10e^{2t} - 5te^{2t}) \\ \frac{1}{3}(-3c_1 e^{-t} + 6c_2 e^{2t} - 10te^{2t} - 10e^{2t}) \end{bmatrix}$  com  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ;
- (ii)  $\begin{bmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - \frac{8}{12}e^t - \frac{1}{4} \\ c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{-2t} - e^t - \frac{3}{4} \end{bmatrix}$  com  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ;
7.  $y(t) = \begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t}(t^2 + 2t) \\ e^{\sqrt{2}t}(t + 1) \\ e^{-t}(t + 1) \end{bmatrix}$

$$8. y(t) = \frac{e^{-2t}}{\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\text{sen}(\pi t) \\ 1 - \cos(\pi t) \end{bmatrix}$$

$$9. (a) y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + e^t (t \log t - t) \text{ com } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

$$(b) y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} - e^{-2t} \text{sen}(e^t) \text{ com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$10. y(x) = 3e^{-2x} - (5 + 2 \log 2)e^{-x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \log(1 + e^x).$$

$$11. (a) \lambda = k = 1 \quad (b) y(t) = (2 + \log 2)t - 2e^{t-2} - 1 - t \log t.$$

$$12. (c) e^t \begin{bmatrix} 1 & 2t & 3t + 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$13. \begin{bmatrix} e^{at} \cos(bt) & -e^{at} \text{sen}(bt) \\ e^{at} \text{sen}(bt) & e^{at} \cos(bt) \end{bmatrix}.$$

$$14. (i) 4,56 \text{ C} ; \quad (ii) 0,05 \text{ s} .$$