TÉCNICO LISBOA

# Análise Complexa e Equações Diferenciais
## 1º Semestre 2019/2020

## Ficha 11: Sistemas de equações de 1ª ordem e equações lineares de ordem $n$ - caso homogéneo

**1.** Considere o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t(1-t)}x + \frac{t}{t-1}y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t^2(1-t)}x + \frac{2}{t(t-1)}y \end{cases}.$$

(a) Determine todas as soluções da forma $x(t) = t^\alpha$; $y(t) = t^\beta$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(b) Determine a solução do problema de valor inicial $x(2) = 0$; $y(2) = 1$.

**2.** Encontre a solução geral dos sistemas:

(i) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 3y - 2x \end{cases}$ ; (ii) $\begin{cases} x' = y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ ; (iii) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$ ;

(iv) $\begin{cases} x' = x - 2y - z \\ y' = y - x + z \\ z' = x - z \end{cases}$ ; (v) $\begin{cases} x' = -z \\ y' = y - 4z \\ z' = -4z \end{cases}$ ; (vi) $\begin{cases} x' = -y + 2z \\ y' = -x + 2z \\ z' = -x - y + 3z \end{cases}$ .

**3.** Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma solução matricial fundamental e resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \text{ com } \mathbf{x}(0) = (1, 0, 0).$$

**4.** Determine a solução geral do sistema

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \frac{dy_3}{dt} \\ \frac{dy_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Sugestão:** Note que pode começar por determinar $y_1(t)$.

**5.** Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \\ z' = y - (\operatorname{sen} t)z \end{cases}$$

que verifica a condição inicial $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

**Sugestão:** Comece por determinar $x(t)$ e $y(t)$.

**6.** Justifique que o problema de valor inicial

$$(t^2+y^2)\,y''' = \text{sen}\,(t)\,y'' + e^y, \qquad y(0)=1,\ y'(0)=2,\ y''(0)=3$$

tem uma solução única.

**7.** Determine a solução geral de cada uma das equações:

(i) $y^{(3)} - 2y^{(2)} = 0 \quad ;$

(ii) $(D+2)^2(D^2-2D+5)^3(D-1)y = 0 \quad ;$

(iii) $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0\ .$

**8.** Resolva os problemas de valor inicial:

(i) $y''' - y'' + y' - y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = -y''(0) = 1;$

(ii) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = 1$ e $y''(0) = 4;$

(iii) $y''' + 5y'' + y' = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$

**9.** Considere a equação

$$y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5y' = 0$$

(i) Determine a sua solução geral.

(ii) Determine para que condições iniciais em $t=0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm soluções convergentes quando $t \to \infty$.

**10.** Seja $A$ uma matriz real $2\times 2$ com valores próprios $a \pm b\mathrm{i}$, com $b \neq 0$. Mostre que as soluções não nulas do sistema

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

descrevem elipses centradas na origem quando $a=0$, e espirais centradas na origem quando $a \neq 0$.

# Soluções

**1.** (a) $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ ou $(\alpha, \beta) = (0, -2)$.
(b) $x(t) = -4 + 2t; \qquad y(t) = 2 - \frac{4}{t^2}$ com $t \in ]1, +\infty[$.

**2.** (i) $e^{2t} \begin{bmatrix} (-c_1 + c_2)\,\text{sen}\, t + c_1 \cos t \\ (-2c_1 + c_2)\,\text{sen}\, t + c_2 \cos t \end{bmatrix}$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;

(ii) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3}(3c_1e^{-t} + 3c_2e^{2t}) \\ \frac{1}{3}(-3c_1e^{-t} + 6c_2e^{2t}) \end{bmatrix}$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;

(iii) $\begin{bmatrix} (c_1 + c_2t)e^{2t} \\ (c_1 + c_2 + c_2t)e^{2t} \end{bmatrix}$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;

(iv) $\begin{bmatrix} c_2 + 3c_3e^{2t} \\ c_1e^{-t} - 2c_3e^{2t} \\ -2c_1e^{-t} + c_2 + c_3e^{2t} \end{bmatrix}$ com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;

(v) $\begin{bmatrix} c_1 + \frac{c_3}{4}e^{-4t} \\ c_2e^t + \frac{4}{5}c_3e^{-4t} \\ c_3e^{-4t} \end{bmatrix}$ com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;

(vi) $\begin{bmatrix} c_1e^t + c_2te^t \\ (2c_3 - c_1 - c_2)e^t + c_2te^t \\ c_2te^t + c_3e^t \end{bmatrix}$ com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

**3.** $Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{2t} & 0 \\ 1 & 0 & e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$; solução do problema de valor inicial: $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

**4.** $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha e^{-2t} \\ 3\alpha te^{-2t} + \beta e^{-2t} + 1 \\ \delta e^t \cos(2t) + \gamma e^t \,\text{sen}\,(2t) \\ -\delta e^t \,\text{sen}\,(2t) + \gamma e^t \cos(2t) \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$.

**5.** $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}\, t + \cos t \\ 2\,\text{sen}\, t \\ 2 - e^{-1+\cos t} \end{bmatrix}$.

**6.** A equação é equivalente ao sistema de três equações de primeira ordem $\frac{dx}{dt} = \left(x_2, x_3, \frac{\text{sen}\,(t)x_3 + e^{x_1}}{t^2 + x_1^2}\right)$ que tem solução única pelo teorema de Picard.

**7.** (i) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t}$ com $c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}$;
(ii) $y(t) = (A+Bt)e^{-2t} + (C+Dt+Et^2)e^t \cos 2t + (F+Gt+Ht^2)e^t \operatorname{sen} 2t + Ie^t$ com $A, B, C, D, E, G, H, I \in \mathbb{R}$;
(iii) $y(t) = c_1 \cos t + c_2 t \cos t + c_3 \operatorname{sen} t + c_4 t \operatorname{sen} t$ com $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

**8.** (i) $y(t) = \cos t + \operatorname{sen} t$; (ii) $y(t) = 4e^t - 3e^{2t} + 3te^{2t}$; (iii) $y(t) = 0$.

**9.** (i) $y(t) = c_1 + e^{2t}\Big(c_2 \cos t + c_3 \operatorname{sen} t\Big)$ com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;
(ii) $y(0) = \alpha \in \mathbb{R}$, $y'(0) = y''(0) = 0$.