Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2019/2020

Ficha 10: Existência, unicidade, prolongamento e comparação de soluções

1. Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 6t\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0\ , \end{cases}$$

diferente da solução $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

2. Considere o seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} (1-t)y\dfrac{dy}{dt} = 1 - y^2 \\ y(1/2) = 2\ , \end{cases}$$

(i) Determine uma solução do PVI, e justifique que existe uma vizinhança de 1/2 na qual essa solução é única.

(ii) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em $\mathbb{R}$.

(iii) Diga, justificando, porque não há contradição ao teorema de Picard.

3. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y^2, \qquad y(0) = 1.$$

(a) Determine a solução indicando o seu intervalo máximo de definição.

(b) Sendo T o operador de Picard associado a este problema e $y_0(t) = 1$. Determine $y_n = T^n(y_0)$ para $n = 1, 2$ e 3.

4. (a) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1 + y^2) \quad , \quad y(1) = 0$$

indicando o seu intervalo máximo de definição.

(b) Considere agora o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1+y^2)e^y \quad , \quad y(1) = 0.$$

Justifique que a solução deste problema existe e é única e mostre que o intervalo máximo de definição da solução é limitado superiormente.

5. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y + e^{-(t+y^4)} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Justifique que a solução deste problema existe e é única. Mostre que o intervalo máximo de definição da solução contém $[0, +\infty[$ e determine $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

6. Considere o problema de valor inicial

$$\left(e^y + \text{sen}^4 y\right)\frac{dy}{dt} = y - y^2, \qquad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Mostre que o intervalo máximo de definição da solução é $\mathbb{R}$ e que $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$.

7. Considere a equação:

$$\frac{dy}{dt} = \cos\,(t + e^y)\,.$$

(a) Justifique que a solução de qualquer problema de valor inicial existe e é única.

(b) Mostre que a solução do problema de valor inicial com $y(0) = 0$ satisfaz $|y(t)| \leqslant |t|$ para todo o $t \in \mathbb{R}$.

(c) Mais geralmente, para o problema de valor inicial que satisfaz $y(t_0) = y_0$, mostre que

$$|y(t) - y_0| \leqslant |t - t_0|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

8. (a) Se $x(t)$ é a solução de uma equação diferencial $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$, determine uma equação satisfeita pela função $y(t) = x(-t)$.

(b) Sejam $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e considere os problemas de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0; \qquad \frac{dw}{dt} = g(t, w), \quad w(t_0) = \|x_0\|.$$

Use a alínea anterior para mostrar que se

$$g(t, \|x\|) \leqslant -\|f(t, x)\|$$

então $\|x(t)\| \leqslant w(t)$ para todos os valores de $t \leqslant t_0$ para os quais as soluções estejam ambas definidas.

(c) Mostre que todas as soluções do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ye^{-x^2} + 1 \\ \frac{dy}{dt} = \text{sen}\,(xy)x \end{cases}$$

têm $\mathbb{R}$ como intervalo máximo de definição.

Soluções

2. (i) $y(t) = \sqrt{1 + 12(1-t)^2}$.

3. (a) $\frac{1}{1-t}$ definida em $]-\infty, 1[$.

(b) $y_1(t) = 1+t; \quad y_2(t) = 1+t+t^2+\frac{t^3}{3}; \quad y_3(t) = 1+t+t^2+t^3+\frac{2}{3}t^4+\frac{1}{3}t^5+\frac{1}{9}t^6+\frac{1}{63}t^7$.

4. (a) $y(t) = \text{tg}\, \frac{t^2-1}{2}, \quad t \in]-\sqrt{\pi+1}, \sqrt{\pi+1}[$.

5. $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$.

7. (a) $\frac{dy}{dt} = -f(-t, y(t))$.