

## Análise Complexa e Equações Diferenciais

### 1º Semestre 2019/2020

#### Ficha 1: Números complexos

1. Escreva uma expressão da forma  $re^{i\theta}$ , para cada um dos números complexos

(i)  $i^3$ ; (ii)  $1 - i$ ; (iii)  $\sqrt{2}(1 + i)$ ; (iv)  $\sqrt{3} - i$ ; (v)  $2 - 2\sqrt{3}i$ ;

(vi)  $(1 - i)(-1 - i)$ ; (vii)  $(1 - i)^{-1}$ ; (viii)  $(\sqrt{3} - i)/(1 + i)$ ; (ix)  $(1 + \sqrt{3}i)^3$ .

2. Escreva uma expressão da forma  $x + iy$ , ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), para cada um dos números complexos

(i)  $e^{\pi i/4}$ ; (ii)  $5e^{-\pi i}$ ; (iii)  $2e^{3\pi i/2}$ ; (iv)  $e^{4\pi i/3}$ ; (v)  $e^{7\pi i/6}$ ;

(vi)  $\overline{2i(\frac{1}{2} - i)}$ ; (vii)  $(1 + 2i)^2 + 4i^3$ ; (viii)  $\frac{1 - \alpha i}{1 + \alpha i}$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

3. Calcule, para  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,

(i)  $i^n$ ; (ii)  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$ ; (iii)  $(1 + i)^n + (1 - i)^n$ ;

4. Encontre todos os valores da raiz

(i)  $\sqrt[3]{i}$ ; (ii)  $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}i}$ ; (iii)  $\sqrt[4]{-1}$ ; (iv)  $\sqrt[3]{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$ .

5. Se  $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  determine os valores de  $z_1\bar{z}_1$ ,  $(\bar{z}_1)^4$  e de  $\sqrt[5]{z_1}$ .

6. Determine as soluções das seguintes equações:

(i)  $(1 - z)^6 = (1 + z)^6$ ; (ii)  $1 - z + z^2 = 0$ ;

(iii)  $1 - z^2 + z^4 - z^6 = 0$ ; (iv)  $1 + z + z^2 + \dots + z^7 = 0$ ;

(v)  $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$ .

7. Esboce os subconjuntos de  $\mathbb{C}$  dados por:

(i)  $|z + 1 - i| = 4$ ; (ii)  $|z - 3i| = |z + i|$ ; (iii)  $\text{Im}(z + i) < 2$ ;

(iv)  $|z + 2i| \geq 2$ ; (v)  $|z - 1| \geq |z - 1 - i|$ ; (vi)  $\text{Im}[(z + i)/2i] < 0$ ;

(vii)  $\operatorname{Re} z \neq 0$ ;      (viii)  $1 < |z - 1| < 2$ ;      (ix)  $|z|^2 > z + \bar{z}$ ;

(x)  $|z + i| + |z - 3i| < 6$ .

8. Mostre que os pontos do plano de Argand representados pelos números complexos  $z_1 = 2+i$ ,  $z_2 = 4 + 3i$ ,  $z_3 = 2 + 5i$  e  $z_4 = 3i$  representam os vértices de um quadrado.

9. Mostre que, para  $x \in \mathbb{R}$  se tem

$$\frac{\sqrt{1+x^2} + ix}{x - i\sqrt{1+x^2}} = i.$$

10. Mostre que  $\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$ .

## Soluções

1. (i)  $e^{3\pi i/2}$  (ii)  $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$  (iii)  $2e^{i\pi/4}$  (iv)  $2e^{-i\pi/6}$  (v)  $4e^{-i\pi/3}$  (vi)  $2e^{i\pi}$   
 (vii)  $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}$  (viii)  $\sqrt{2}e^{-i5\pi/12}$  (ix)  $8e^{i\pi}$ .
2. (i)  $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ . (ii)  $-5$  (iii)  $-2i$ . (iv)  $-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$ . (v)  $-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ . (vi)  $2-i$ .  
 (vii)  $-3$ . (viii)  $\frac{1-\alpha^2-2\alpha i}{1+\alpha^2}$ .
3. (i)  $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 4k \\ i & \text{se } n = 4k + 1 \\ -1 & \text{se } n = 4k + 2 \\ -i & \text{se } n = 4k + 3 \end{cases}$  para  $k \in \mathbb{N}$  (ii)  $e^{-in\pi/2}$   
 (iii)  $2(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}$
4. (i)  $\{e^{i\pi/6}, e^{5\pi i/6}, -i\}$  (ii)  $\{\pm 2e^{-\pi i/6}\}$  (iii)  $\{e^{-i\pi/4}, e^{i\pi/4}, e^{3\pi i/4}, e^{5\pi i/4}\}$   
 (iv)  $\{\sqrt[3]{2}e^{i\pi/12}, \sqrt[3]{2}e^{3i\pi/4}, \sqrt[3]{2}e^{17i\pi/12}\}$
5.  $z_1 \bar{z}_1 = 1, (\bar{z}_1)^4 = e^{4\pi i/3}$  e  $\sqrt[5]{z_1} = e^{i\frac{2\pi+2k\pi}{5}}$  com  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ .
6. (i)  $z \in \{0, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, \frac{i}{\sqrt{3}}, -\frac{i}{\sqrt{3}}\}$  (ii)  $z = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$   
 (iii)  $z \in \{-1, 1, e^{-i\pi/4}, e^{i\pi/4}, e^{3\pi i/4}, e^{5\pi i/4}\}$  (iv)  $z \in \{-1, i, -i, e^{-i\pi/4}, e^{i\pi/4}, e^{3\pi i/4}, e^{5\pi i/4}\}$   
 (v)  $z \in \{3, 1+2i, -1, 1-2i\}$
7. (i) Circunferência com centro em  $-1+i$  de raio 4. (ii) Recta horizontal com ordenada 1.  
 (iii) Região abaixo da recta da alínea anterior.  
 (iv) O complementar do interior do círculo de raio 2 e centrado em  $-2i$ .  
 (v) Região acima da, ou na, recta horizontal de ordenada  $\frac{1}{2}$ .  
 (vi) Semi-plano à direita do eixo dos  $yy$ . (vii) O complementar do eixo dos  $yy$ .  
 (viii) Região compreendida entre as circunferências de raio 1 e 2 centradas em 1.  
 (ix) Exterior do círculo de raio 1 centrado em 1.  
 (x) Elipse com focos em  $-i$  e  $3i$ , eixo vertical de comprimento 6 e horizontal de comprimento  $2\sqrt{5}$ .
8. Verifique que os comprimentos dos lados do polígono e das suas diagonais são iguais; em alternativa, considere os pontos  $w_j = z_j - (2+3i)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  e verifique que  $w_j^4$  tem o mesmo valor para  $j = 1, 2, 3, 4$ .