

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2019/2020, 15/01/2020

Testes de Recuperação / Exame — versão A

LEIC-T, LEGI, LEE, LETI

1º Teste / Exame (1ª parte)

[3,0 val.]

1. Considere a função $u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy^2 - 3\alpha x^2y$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Determine todos os valores de α para os quais u é harmónica em $\mathbb{R}^2$;
- (b) Considerando $\alpha = 1$, determine a função inteira f tal que $\operatorname{Re}(f) = u$ e $f(0) = i$;
- (c) Calcule, justificando, o valor do integral

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z) + f'(z)}{z + 1} dz,$$

onde o caminho γ é parametrizado por $\gamma(t) = -1 + 2e^{-it}$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

[3,0 val.]

2. Considere a função de variável complexa f definida por

$$f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z(z + 3i)} + \operatorname{sen}\left(\frac{i}{z + 1}\right) + \frac{z + 1}{(z + 5i)^6}.$$

- (a) Determine e classifique todas as singularidades de f ;
- (b) Calcule, justificando, o valor do integral

$$\oint_{|z|=\pi} f(z) dz$$

onde a curva é percorrida no sentido directo.

[2,0 val.]

3. Usando o teorema dos resíduos, calcule o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(2x)}{(4 + x^2)(1 + x^2)} dx$$

[1,0 val.]

4. Considere a função definida por

$$f(z) = \frac{1}{z(2 - iz)} + \log(1 + z^2)$$

onde $\log$ é a função logaritmo correspondente à escolha do argumento principal. Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent, em torno de $z = 0$, indicando o seu domínio de validade.

[1,0 val.]

5. Considere a função g definida no seu domínio por

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(2i)^n} z^n.$$

Justifique que g é holomorfa num aberto que contém $\{z : |z| \leq 1\}$ e calcule

$$\oint_{|z|=1} \overline{g(z)} dz.$$

2º Teste / Exame (2ª parte) — versão A

6. Considere o problema de valor inicial (PVI)

$$2x^2 + \frac{y^3}{x} - 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0, \quad y(1) = 2.$$

[1,0 val.]

(a) Calcule um factor integrante da forma $\mu = \mu(x)$ para a equação diferencial;

[2,0 val.]

(b) Determine explicitamente a solução $y = y(x)$ do PVI e indique o intervalo máximo de existência e unicidade.

Sugestão: Caso não tenha resolvido a alínea (a), mostre que $\mu(x) = x^{-1}$ é um factor integrante para a equação diferencial; note que isso valerá somente cotação parcial na alínea (a).

[1,5 val.]

7. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y - 3 \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y + 1 \end{cases}$$

com $x(0) = y(0) = -1$.

[2,5 val.]

8. (a) Determine a solução do problema de valores iniciais

$$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t}, \quad y(0) = 1 + y'(0) = 0;$$

(b) Determine uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que todas as soluções de

$$y'' + 9y = f(t)$$

estejam definidas em $\mathbb{R}$ com $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |y(t)| = +\infty$.

[2,0 val.]

9. Determine uma solução do problema de valor na fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9u & \text{para } 0 < x < \pi, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0 & \text{para } t \geq 0, \\ u(0, x) = 0 & \text{para } 0 \leq x \leq \pi, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 15 - \cos(3x) & \text{para } 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

[1.0 val.]

10. Seja $L > 0$ e uma função f , seccionalmente C^1 em $[-L, L]$, par e que verifica

$$f(L - x) = -f(x), \quad x \in [0, L].$$

Mostre que no desenvolvimento em série de Fourier de f no intervalo $[-L, L]$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

se tem $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $a_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Justifique ainda que

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos[(2n+1)x], \quad \text{para } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$