Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2019/2020

1º Teste, versão A

(CURSOS: LEIC-T, LEGI, LEE, LETI)

2 de Novembro de 2019, 9h30m

Duração: 1h 30m

[3,0 val.] 1. Considere a função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(x + \mathrm{i}y) = x^2 + 3x - y^2 + \mathrm{i}\, y(-1 - 2x)$$

a) Estude a diferenciabilidade da função g e calcule o valor da derivada nos pontos onde g é diferenciável.

b) Determine uma função inteira $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = x^2 + 3x - y^2 \qquad \text{e} \qquad f(\mathrm{i}) = -1.$$

c) Calcule o integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{i} + f(z)}{(z + \mathrm{i})^2}\, dz,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

a) Para que g seja diferenciável, no sentido complexo, num ponto $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ deve ser $\mathbb{R}$-diferenciável e satisfazer as equações de Cauchy-Riemann nesse ponto. Primeiro, g é $\mathbb{R}$-diferenciável para qualquer $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ porque:

g é dada por um polinómio em (x, y).

Segundo, as funções $u(x, y) = x^2 + 3x - y^2$ e $v(x, y) = y(-1 - 2x)$, tais que $g(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, verificam as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 3x = -1 - 2x \\ -2y = -(-2y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

apenas para $z = -1 + \mathrm{i}0$. Então g é diferenciável apenas no ponto $z = -1$ com derivada

$$g'(-1) = \frac{\partial u}{\partial x}(-1, 0) + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}(-1, 0) = -2 + 3 = 1.$$

b) Com $u(x, y) = x^2 + 3x - y^2$, para que $f = u + \mathrm{i}\,\tilde{v}$ seja inteira é necessário que sejam satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3 \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{v}(x, y) = 2xy + 3y + C(x) \\ 2y + C'(x) = 2y \end{cases}$$

Da segunda equação conclui-se que $C'(x) = 0$ pelo que $C(x) = C$ onde C é uma constante real. Como $f(\mathrm{i}) = -1$, tem-se $\tilde{v}(0, 1) = 0 \Leftrightarrow C = -3$ e portanto

$$f(x + \mathrm{i}y) = x^2 + 3x - y^2 + \mathrm{i}(2xy + 3y - 3).$$

c) Dado que f é inteira, e o número $z_0 = -\mathrm{i}$ está no interior da circunferência $C = \{z : |z| = 2\}$, a fórmula integral de Cauchy leva a

$$\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{i} + f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz = 2\pi\mathrm{i} f'(z_0) = 2\pi\mathrm{i} f'(-1) = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(0, -1) - \mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}(0, -1)\right) = 2\pi(1 + 3\mathrm{i}).$$

[1,0 val.] 2. Seja C uma curva seccionalmente regular, contida em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, que une -1 a i. Calcule, justificando, o valor do integral

$$\int_C \frac{1}{z^3}\, e^{1/z^2}\, dz.$$

Resolução:

A função integranda é primitivável em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ porque,

$$\frac{1}{z^3}\, e^{1/z^2} = \frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{2}\, e^{1/z^2}\right), \qquad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

logo do teorema fundamental do cálculo temos que o valor do integral é independente do caminho utilizado para unir -1 a i. A regra de Barrow garante que

$$\int_C \frac{1}{z^3}\, e^{1/z^2}\, dz. = \left[-\frac{1}{2}\, e^{1/z^2}\right]_{z=-1}^{z=\mathrm{i}} = -\frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^{1}\right) = \operatorname{sh}(1).$$

[2,5 val.] 3. a) Considere a função definida por

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z+\pi)^2} + \frac{e^{1/(z-\mathrm{i})^2}}{z-\mathrm{i}}$$

Classifique todas as singularidades de f e calcule os respectivos resíduos.

b) Calcule

$$\oint_{|z|=3} f(z)\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido horário.

Resolução:

a) As singularidades de f são em $z=-\pi$ e $z=\mathrm{i}$. Consideremos $f = f_1 + f_2$ com $f_1(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z+\pi)^2}$ e $f_2(z) = \frac{e^{1/(z-\mathrm{i})^2}}{z-\mathrm{i}}$. Em conta que $-\pi$ é singularidade apenas em f_1 e que o limite

$$\lim_{z\to-\pi}(z+\pi)\, f(z) = \lim_{z\to-\pi}(z+\pi)\, f_1(z) = \lim_{z\to-\pi}\frac{\operatorname{sen}(z)}{z+\pi} = \lim_{z\to-\pi}\frac{\cos(z)}{1} = \cos(-\pi) = -1$$

é finito e não nulo conclui-se que $z=-\pi$ é um pólo simples de f. Os respectivo resíduo é

$$\operatorname{Res}(f,-\pi) = -1.$$

A natureza da singularidade em $z=\mathrm{i}$ obtém-se da expansão de f em série de Laurent, em torno de $z=\mathrm{i}$. A parte singular desta série coincide com aquela de

$$f_2(z) = \frac{e^{1/(z-\mathrm{i})^2}}{z-\mathrm{i}} = \frac{1}{z-\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{(z-\mathrm{i})^{2n}} = \frac{1}{z-\mathrm{i}} + \frac{1}{(z-\mathrm{i})^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^5} + \cdots$$

pelo que f tem uma singularidade essencial em $z=\mathrm{i}$ com $\operatorname{Res}(f,\mathrm{i}) = 1$.

b) Dado que f é holomorfa para qualquer $z\in\mathbb{C}\setminus\{-\pi,\mathrm{i}\}$ e apenas a singularidade em i se encontra no interior da curva $\{z : |z| = 3\}$ então, resulta do teorema dos resíduos

$$\oint_{|z|=3} f(z)\, dz = -2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f,\mathrm{i}) = -2\pi\mathrm{i}.$$

[1,5 val.] 4. Usando o teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\operatorname{sen}\theta}\, d\theta\,.$$

Justifique a resposta.

Da definição de seno complexo temos

$$\frac{1}{5-3\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{5-3\left(\frac{e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)}.$$

Então

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\operatorname{sen}\theta}\, d\theta \quad = \quad \oint_{|z|=1} \frac{1}{5-3\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}}\,\frac{dz}{\mathrm{i}z} \quad = \quad \oint_{|z|=1} \frac{2}{-3z^2+10\mathrm{i}z+3}\, dz.$$

A função integranda $f(z) = \frac{2}{-3z^2+10\mathrm{i}z+3}$ tem singularidades em $z = 3\mathrm{i}$ e $z = \mathrm{i}/3$ das quais apenas $z = \mathrm{i}/3$ se encontra no interior da circunferência unitária. Aplicando o teorema dos resíduos escrevemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}/3)$$

Dado que as singularidades são pólos simples de f temos

$$\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}/3) = \lim_{z\to\mathrm{i}/3}(z-\mathrm{i}/3)\,f(z) \;=\; \lim_{z\to\mathrm{i}/3}\frac{2(z-\mathrm{i}/3)}{-3(z-3\mathrm{i})(z-\mathrm{i}/3)} \;=\; \frac{2}{-3(\mathrm{i}/3-3\mathrm{i})} = -\frac{\mathrm{i}}{4}$$

logo conclui-se

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

[1,0 val.] 5. Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função $g(z) = \log(z^2+4)$, com centro em $z = 0$, indicando a região de convergência da série. Considere que $\log$ denota o valor principal do logaritmo.

Resolução: O domínio de holomorfia da função g é

$$\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C} : z^2+4\in\mathbb{R}_0^-\} = \mathbb{C}\setminus\{z=\mathrm{i}\,y\in\mathbb{C} : y\geqslant 2 \text{ ou } y\leqslant -2\}$$

O raio de convergência da série pedida é então igual a 2. Calculemos o desenvolvimento em série de Taylor, com centro em $z = 0$, da derivada de g

$$g'(z) = \frac{2z}{z^2+4} = \frac{z}{2}\,\frac{1}{1-(-z^2/4)} = \frac{z}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-z^2/4)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\,z^{2n+1}$$

válido para $|z| < 2$. Ao longo de um qualquer caminho, contido em $U = \{z\in\mathbb{C} : |z| < 2\}$, a unir 0 e um ponto $z\in U$, temos

$$g(z) = C + \int_0^z g'(u)\,du$$

onde $C = g(0) = \log 4$. Por integração termo-a-termo da série anterior obtemos o desenvolvimento em série de Taylor, com centro em $z = 0$, de g

$$g(z) = \log 4 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(2n+2)}\,z^{2n+2} = \log 4 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)}\,z^{2n+2}, \qquad \text{para } |z| < 2.$$

[1,0 val.] 6. Seja $\alpha > 0$ e f uma função inteira tal que

$$|f(z)| \geqslant \alpha, \quad \text{para qualquer } z \in \mathbb{C}.$$

Mostre que f é uma função constante.

Resolução:

Com f uma função inteira tal que $|f(z)| \geqslant \alpha > 0$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$, temos

$$f(z) \neq 0, \quad \text{para qualquer } z \in \mathbb{C}$$

logo $\frac{1}{f(z)}$ é também uma função inteira. Além disso,

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1}{\alpha}, \quad \text{para qualquer } z \in \mathbb{C}$$

ou seja $\frac{1}{f}$ é uma função limitada. Pelo teorema de Liouville $\frac{1}{f}$ é constante e consequentemente f é constante.