Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2018/2019

Ficha 9: Equações diferenciais separáveis, exactas e redutíveis a exacta

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

(a) $x^3 + (y+1)^2\frac{dy}{dx} = 0$; (b) $\varphi' = e^{\varphi - t}$; (c) $xy + (1+x^2)y' = 0$;

(d) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$; (e) $2ty^3 + 3t^2y^2y' = 0$; (f) $\operatorname{sen}(\pi x)\frac{dy}{dx} = \pi y \cos(\pi x)$.

2. Resolva o problema de valor inicial $x' = x \operatorname{sen} t + x^2 \operatorname{sen} t$, $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, indicando o intervalo máximo de definição da solução.

3. Considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c)$$

em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

(a) Mostre que a substituição $v = at + by + c$, transforma a equação numa equação separável.

(b) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\dot{y} = e^{2t+y-1} - 2 \quad , \quad y(0) = 1,$$

indicando o intervalo máximo de definição da solução.

4. Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{d\,y}{d\,t} = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty} \quad , \quad t > 0 \quad \text{e} \quad y < 0$$

que verifica a condição inicial $y(1) = -1$, e indique o intervalo máximo de definição da solução. **Sugestão:** Considere a mudança de varável $v = y/t$.

5. Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + \left(y^3 - \log x\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

(a) Verifique que (1) tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ e determine-o.

(b) Prove que as soluções de (1) são dadas implicitamente por $\Phi(x,y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\log x$$

(c) Determine a solução de (1) que satisfaz a condição inicial $y(1) = \sqrt{2}$.

6. Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial indicando o intervalo máximo de definição da solução:

(a) $3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0, \qquad x(0) = 1;$

(b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2+2x}, \qquad y(1) = 1;$

(c) $\frac{x}{t} - \text{sen}\,(t) + x' = 0, \qquad x(\pi) = 1;$

(d) $y^2\left(\frac{1}{x} + \log x\right) + 2y\log x\,\frac{dy}{dx} \ = \ 0, \qquad y(e) \ = \ -1.$

7. Considere a equação diferencial ordinária

$$\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + \left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

(a) Mostre que (2) tem um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$.

(b) Mostre que a solução de (2) com condição inicial $y(-1) = 1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$.

(c) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto -1, da solução dada implicitamente na alínea anterior.

Soluções

1. (a) $-1+\sqrt[3]{C-\frac{3x^4}{4}}$; (b) $-\log\,(e^{-t}+C)$; (c) $\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$; (d) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{x^2}{2}+C\right)$;

   (e) $C\,t^{-2/3}$; (f) $C\,\mathrm{sen}\,(\pi x)$.

2. $x(t)=\frac{2e^{-\cos t}}{1-2e^{-\cos t}}$, $I_{\max}=\,]\,\arccos(\log 2)\,,\,2\pi-\arccos(\log 2)\,[$

3. (a) $\dfrac{\dot{v}}{bf(v)+a}=1$; (b) $y(t)=1-2t-\log\,(1-t)$, $I_{\max}=]-\infty,1[$.

4. $y(t)=-t\sqrt{2t-1}$, $I_{\max}=\left]\frac{1}{2},\infty\right[$.

5. (a) $\mu(y)=y^{-2}$; (c) $\frac{y^2}{2}+\frac{\log x}{y}=1$.

6. (a) $x(t)=-t^2+\sqrt{t^4-t^3+1}$, $I_{\max}=\mathbb{R}$;

   (b) $y(x)=\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+8}}{2}}$, $I_{\max}=\mathbb{R}$;

   (c) $x(t)=\frac{\mathrm{sen}\,t-t\cos t}{t}$, $I_{\max}=]0,\infty[$;

   (d) $y(x)=-\sqrt{\frac{\exp\,(e-x)}{\log x}}$, $I_{\max}=]1,\infty[$.

7. (a) $\mu(x,y)=xy$;

   (c) $P_2(x)=y(-1)+y'(-1)(x+1)+\frac{y''(-1)}{2}(x+1)^2=1+(x+1)-\frac{1}{3}(x+1)^2$.