

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2018/2019

Ficha 8: Equações diferenciais lineares de primeira ordem

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

a) $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$

b) $\frac{dy}{dt} = -ye^t$

c) $\frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$

d) $\psi' = \psi - t$

e) $x \frac{dy}{dx} + 2y = (x-2)e^x$

f) $\frac{di}{dt} - 6i = 10 \operatorname{sen}(2t)$

g) $\frac{dy}{dt} = y \left(\frac{1}{t} - \operatorname{tg}(t) \right) + t \cos(t)$

h) $(1+y^2) \frac{dx}{dy} = \operatorname{arc\,tg}(y) - x$

2. Determine as soluções dos seguintes problemas de valor inicial

a) $xy' = 2y + x^3e^x$, $y(1) = 0$,

b) $\frac{dv}{du} + \frac{2u}{1+u^2}v - \frac{1}{1+u^2} = 0$, $v(0) = 1$.

c) $\begin{cases} x' + h(t)x - t = 0, \\ x(-1) = 2 \end{cases}$, com $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$.

3. De acordo com a lei de arrefecimento de Newton, a taxa de arrefecimento de um corpo numa corrente de ar, é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a do ar. Assumindo que a temperatura do ar é 30° e que o corpo arrefece de 100° para 70° em 15m, determine o tempo que o corpo demora a atingir a temperatura de 40° .

4. Determine a solução geral da equação diferencial

$$x^2 \cos(y) \frac{dy}{dx} = 2x \operatorname{sen}(y) - 1$$

Sugestão: Efectue a mudança de variável $v = \operatorname{sen} y$

5. Considere a equação diferencial

$$t^2 \frac{dy}{dt} + 2ty - y^3 = 0$$

(a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-2}$.

- (b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.
- (c) No caso geral, considere a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x + \beta(t)x^n$$

onde α e β são funções definidas e contínuas num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Mostre que a mudança de variável $y(t) = (x(t))^{1-n}$ transforma a equação numa equação linear.

6. Resolva os seguintes problemas de valor inicial envolvendo equações de Bernoulli:

(a) $\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = \frac{y^3}{t^2}, \quad y(1) = 2;$

(b) $t\frac{dy}{dt} + y = -ty^2, \quad y(1) = 1.$

7. Considere a equação de Riccati escalar

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - x - x^2 \tag{1}$$

(a) Mostre que a função $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t)$ é solução da equação de Riccati sse ψ é solução de uma certa equação de Bernoulli.

(b) Determine a solução da equação (1).

8. Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = f(t),$$

onde a e f são funções contínuas em \mathbb{R} que verificam

$$a(t) > c > 0 \quad \forall t \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

Mostre que qualquer solução da equação diferencial satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Soluções

1. a) $\arctg(t) + C$; b) Ce^{-e^t} ; c) $2x + Ce^{-x}$; d) $t + 1 + Ce^t$; e) $\frac{e^x(x-2)^2 + C}{x^2}$;
f) $Ce^{6t} - \frac{\cos(2t) + 3\operatorname{sen}(2t)}{2}$; g) $t(t + C)\cos(t)$; h) $\arctg(y) - 1 + Ce^{-\arctg(y)}$.
(em todos os casos, $C \in \mathbb{R}$).

2. a) $x^2(e^x - e)$; b) $\frac{u+1}{u^2+1}$; c) $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2+3}{2} & \text{se } t \leq 0 \\ 1 + \frac{1}{2}e^{-t^2/2} & \text{se } t > 0 \end{cases}$.

3. A temperatura do corpo no instante t (medido em horas), $T(t)$ verifica a equação diferencial $T'(t) = k(T(t) - 30)$.

Resposta: $t = -\frac{\log 7}{4\log(4/7)} = \frac{1}{4(1-\log 4/\log 7)} \approx 0,8693\text{h} \approx 52\text{m}$.

4. $y(x) = \arcsen\left(\frac{1}{3x} + Cx^2\right) + 2\pi k$ ou $y(x) = \pi - \arcsen\left(\frac{1}{3x} + Cx^2\right) + 2\pi k$, com $k \in \mathbb{Z}$ e C uma constante real.

5. (a) $y(t) = \pm \sqrt{\frac{5t}{2+5ct^5}}$, onde c é uma constante real;

(b) $y(t) = \sqrt{\frac{5t}{2+3t^5}}$ em $]0, +\infty[$; (c) $\frac{dy}{dt} = (1-n)\alpha(t)y + (1-n)\beta(t)$.

6. (a) $y(t) = \sqrt{\frac{20t}{8-3t^5}}$;

(b) $y(t) = \frac{1}{t(\log t + 1)}$.

7. (a) $\frac{d\psi}{dt} = -\left(\frac{2}{t} + 1\right)\psi - \psi^2$; (b) $x(t) = \frac{1}{t} + \psi(t) = \frac{1}{t} + \left(t^2 e^t \left(\operatorname{P}\left[\frac{e^{-t}}{t^2}\right] + C\right)\right)^{-1}$, $C \in \mathbb{R}$.