

Análise Complexa e Equações Diferenciais
 1º Semestre 2018/2019

Ficha 7: Séries de Laurent. Singularidades, teorema dos resíduos e aplicações.

1. Determine a série de Laurent da função $f(z)$ na vizinhança do ponto z_0 , isto é, válida em $0 < |z - z_0| < R$, indicando o valor de R ;

- (i) $f(z) = \frac{\text{sen } z}{z^2}$, $z_0 = 0$; (ii) $f(z) = z^3 e^{1/z}$, $z_0 = 0$;
 (iii) $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$, $z_0 = 0$; (iv) $f(z) = \frac{\text{sen } z}{z - 2}$, $z_0 = 2$.

2. Determine a série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{1}{(z - 2)(z - 3)}$$

válida em

- (i) $\{z : 2 < |z| < 3\}$; (ii) $\{z : 3 < |z| < +\infty\}$.

3. Determine a série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$$

válida em

- (i) $\{z : 0 < |z - i| < 2\}$; (ii) $\{z : |z - i| > 2\}$.

Aproveite os anteriores desenvolvimentos em série para calcular

- (iii) $\oint_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{(z-i)^3} dz$; (iv) $\oint_{|z-i|=3} f(z) dz$,

onde as curvas são percorridas uma vez em sentido directo.

4. Classifique a singularidade z_0 da função $f(z)$

- (i) $f(z) = \frac{1}{z - \text{sen } z}$, $z_0 = 0$; (ii) $f(z) = \frac{\text{sen } z}{e^{-z} + z - 1}$, $z_0 = 0$;
 (iii) $f(z) = \frac{1 + \cos z}{z - \pi}$, $z_0 = \pi$; (iv) $f(z) = \frac{\text{sh } z}{z}$, $z_0 = 0$;
 (v) $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}$, $z_0 = 0$; (vi) $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}$, $z_0 = -1$.

5. Determine e classifique todas as singularidades das seguintes funções:

$$(i) f(z) = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} z}; \quad (ii) f(z) = \cos(z^{-1}); \quad (iii) f(z) = \frac{1}{e^{-z} - 1} + z^{-2}.$$

6. Calcule $\operatorname{Res}(f, z_0)$

$$(i) f(z) = \frac{z^{n-1}}{\operatorname{sen}^n z}, \quad z_0 = 0, n = 1, 2, \dots; \quad (ii) f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{(1 - \cos 2z) \operatorname{sen} z}, \quad z_0 = 0;$$

$$(iii) f(z) = \frac{z^{n-2}}{\operatorname{sh}^n z}, \quad z_0 = 0, n = 1, 2, \dots;$$

7. Calcule os resíduos da função $f(z)$ nas suas singularidades

$$(i) f(z) = \frac{\operatorname{cotg} z}{z^2 - \pi z/4}; \quad (ii) f(z) = z^3 e^{1/z}; \quad (iii) f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{(z^2 + 1)(z - 3)};$$

$$(iv) f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z - i}; \quad (v) f(z) = \frac{e^{1/z}}{z + 1}.$$

8. Calcule os integrais, onde as curvas são percorridas uma vez em sentido directo

$$(i) \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 - 6z} dz; \quad (ii) \oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen}(iz)}{z^2 - 4z + 3} dz;$$

$$(iii) \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{ze^{1/(z+2)}} dz; \quad (iv) \oint_{|z|=2} \frac{\cos(iz)}{z^3} dz;$$

$$(v) \int_{\gamma} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)} dz, \quad \gamma = \{z = x + iy : x^{2/3} + y^{2/3} = 3^{2/3}\};$$

$$(vi) \int_{\gamma} \frac{\cos(z/2)}{z^2 - 4} dz, \quad \gamma = \{z = x + iy : x^2/9 + y^2/4 = 1\};$$

$$(vii) \int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{z^3 - 1} dz, \quad \gamma = \{z = x + iy : x^2 + y^2 - 2x = 0\}.$$

9. Calcule os seguintes integrais:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx; & \text{(ii)} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx; & \text{(iii)} \quad & \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^2 + 1} dx, \quad a > 0; \\
 \text{(iv)} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx; & \text{(v)} \quad & \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2p \cos x + p^2} dx, \quad 0 < p < 1; \\
 \text{(vi)} \quad & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta; & \text{(vii)} \quad & \int_0^{\pi} \frac{\cos^4 x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx.
 \end{aligned}$$

10. Calcule $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2 + 1} dx$ do seguinte modo: sendo $r > 0$, escrevemos C_r para a semicircunferência

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, \operatorname{Im}(z) \geq 0\},$$

e, para $a, b \in \mathbb{R}$, escrevemos $[a, b] = \{t + 0i \in \mathbb{C} : a \leq t \leq b\}$. Seja $\sqrt[4]{z}$ a função raiz quarta que toma valores no primeiro quadrante. Dados $0 < \epsilon < R$, considere a curva

$$\gamma_{\epsilon, R} = C_R \cup [-R, -\epsilon] \cup -C_{\epsilon} \cup [\epsilon, R]$$

percorrida uma vez no sentido directo. Comece por mostrar que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_{\epsilon}} \frac{\sqrt[4]{z}}{z^2 + 1} dz = 0$ e

que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\sqrt[4]{z}}{z^2 + 1} dz = 0$. Finalmente, calcule $\oint_{\gamma_{\epsilon, R}} \frac{\sqrt[4]{z}}{z^2 + 1} dz$ para $0 < \epsilon < 1 < R$.

11. Use as curvas $\gamma_{\epsilon, R}$ definidas na pergunta anterior e o teorema dos resíduos para calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$$

12. Seja $f(z)$ uma função analítica no conjunto $A = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Observe que a função $F(z) = -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ possui uma singularidade isolada em $z = 0$. Defina-se o **resíduo de f em ∞** por:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}(F, 0).$$

Mostre que se $\gamma \subset A$ é uma curva simples, fechada, percorrida no sentido directo, que contém os pontos $\{z_1, \dots, z_n\}$ no seu interior, então:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty).$$

Aproveite o resultado para calcular

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^3 e^{1/z}}{z^3 + 1} dz$$

onde a curva é percorrida uma vez em sentido directo.

13. Seja F uma função inteira tal que

$$f(z) = F\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

tem um pólo. Mostre que $F(z)$ é um polinómio.

14. Suponha que $f(z)$ é uma função analítica com uma singularidade essencial em $z = z_0$. Este exercício mostra que para todo o número complexo $a \in \mathbb{C}$, existe uma sucessão z_n convergente para z_0 tal que $f(z_n)$ converge para a . Em particular, não existe o limite $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

- (a) Use as fórmulas integrais para os coeficientes da série de Laurent, em torno de z_0 , para mostrar que se $g(z)$ tem uma singularidade isolada em z_0 e é limitada numa vizinhança de z_0 então z_0 é uma singularidade removível de $g(z)$.
- (b) Assumindo que existe um número complexo $a \in \mathbb{C}$ tal que a condição do enunciado não se verifica, mostre que a função $g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$ é limitada numa vizinhança de $z = z_0$.
- (c) Mostre que se $g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$ tem uma singularidade removível em z_0 então $f(z)$ tem, ou um pólo, ou uma singularidade removível em z_0 .

Soluções

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}$ para $0 < |z| < \infty$; (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n+3}}{n!}$ para $0 < |z| < \infty$;
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{2n-2}$ para $0 < |z| < \infty$;
 - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2}{(2n+1)!} (z-2)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 2}{(2n)!} (z-2)^{2n-1}$ para $0 < |z-2| < \infty$.
- $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$; (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{z^{n+1}}$;
- $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{(2i)^{n+1}} (z-i)^{n-3}$;
 - $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^n (2i)^n}{(z-i)^{n+4}}$;
 - $\oint_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{(z-i)^3} dz = -\frac{5\pi i}{32}$;
 - $\oint_{|z-i|=3} f(z) dz = 0$.
- Pólo de ordem 3; (ii) Pólo simples; (iii) Singularidade removível;
 - Singularidade removível; (v) Pólo de ordem 4; (vi) Pólo simples.
- $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$ (pólos de ordem 2); (ii) 0 (singularidade essencial);
 - 0 (pólo de ordem 2) e $2k\pi i$, para qualquer $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (pólos simples).
- Pólo simples e $\text{Res}(f, 0) = 1$; (ii) Pólo simples e $\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{4}$;
 - Pólo de ordem 2 e $\text{Res}(f, 0) = 0$.
- 0 é pólo de ordem 2 e $\text{Res}(f, 0) = -\frac{16}{\pi^2}$;
 $\frac{\pi}{4}$ é pólo simples e $\text{Res}(f, \frac{\pi}{4}) = \frac{4}{\pi}$;
 $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, são pólos simples e $\text{Res}(f, k\pi) = \frac{4}{k\pi^2(4k-1)}$.
 - 0 é singularidade essencial e $\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{4!}$.
 - i é pólo simples e $\text{Res}(f, i) = \frac{\text{ch } i}{2i(i-3)} = \frac{\cos 1}{2i(i-3)}$;
 - $-i$ é pólo simples e $\text{Res}(f, -i) = \frac{\text{ch } i}{2i(i+3)} = \frac{\cos 1}{2i(i+3)}$;
 - 3 é pólo simples e $\text{Res}(f, 3) = \frac{\text{ch } 3}{10}$.
 - i é pólo simples e $\text{Res}(f, i) = -1$.
 - -1 é pólo simples e $\text{Res}(f, -1) = e^{-1}$;
 - 0 é singularidade essencial e $\text{Res}(f, 0) = 1 - e^{-1}$.
- $-\frac{\pi i}{3}$; (ii) $\pi \text{ sh } 1$; (iii) 0; (iv) πi ; (v) 0; (vi) 0; (vii) $\frac{2\pi i e^2}{3}$.
- $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$; (ii) $\frac{3\pi}{8}$; (iii) $\frac{\pi}{2e^a}$; (iv) $\frac{\pi}{e}$; (v) $\frac{2\pi}{1-p^2}$ (vi) $\pi\sqrt{2}$; (vii) $\frac{\pi}{2}(4\sqrt{2} - 5)$.
- O integral ao longo de $\gamma_{\epsilon, R}$ é $\pi e^{i\frac{\pi}{8}}$ e $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx = \pi \frac{e^{i\frac{\pi}{8}}}{1+e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2\pi}{2+\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{8}$.
- $\frac{\pi}{2}$.