TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2018/2019

Ficha 5: Teorema de Cauchy. Fórmulas integrais de Cauchy.

1. Para $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, designa-se por $\gamma(a,r)$ o caminho $\gamma(t) = a + re^{\mathrm{i}t}$, com $t \in [0, 2\pi]$. Calcule $\displaystyle\oint_{\gamma(a,r)} (z^2+1)^{-1} dz$ para:

(i) $\gamma(1,1)$; (ii) $\gamma(\mathrm{i},1)$; (iii) $\gamma(-\mathrm{i},1)$; (iv) $\gamma(0,2)$; (v) $\gamma(3\mathrm{i},\pi)$.

2. Determine se as seguintes funções são primitiváveis no domínio indicado e em caso afirmativo determine uma primitiva.

(a) $z^2\, e^z$, em $\mathbb{C}$; (b) $\frac{\cos z}{z}$, em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;

(c) $f(x+\mathrm{i}y) = 3y + x^2 - y^2 + \mathrm{i}(2xy - 3x)$, em $\mathbb{C}$;

(d) $\frac{1}{z(z-1)}$, em $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$; (e) $\frac{1}{z(z-1)}$, em $\mathbb{C} \setminus \{x + 0\mathrm{i} : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

3. Calcule os integrais

(i) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\, dz$ (ii) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2} dz$ (iii) $\displaystyle\oint_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch}\left(e^{\mathrm{i}\pi z}\right)}{z^3 - 4z^2} dz$

(iv) $\displaystyle\oint_{|z|=1/2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{z+1}\right)}{z^3} dz$

4. Determine todos os valores possíveis do integral

$$I = \oint_C \frac{z \cos z}{z^2+1}\, dz$$

onde C é uma qualquer curva de Jordan, seccionalmente regular, contida em $\mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$.

5. Sendo $\log z$ a função logaritmo determinada pela escolha do argumento no intervalo $[0, 2\pi[$ e $z^{-1+\mathrm{i}} = \exp\left[(-1+\mathrm{i})\log z\right]$, calcule

$$\oint_{|z|=1} z^{-1+\mathrm{i}}\, dz,$$

onde a curva é percorrida no sentido positivo.

6. Considere a função complexa definida por

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y + \mathrm{i}\left(x^2 - y^2 + 2xy - 2x\right).$$

Justificando pormenorizadamente a sua resposta, determine o valor do integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2}\, dz,$$

onde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - \mathrm{i}| = 4\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

7. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e considere a função $u(x, y) = x^3\lambda^3 - 3xy^2\lambda$.

(i) Determine para que valores de λ a função u é harmónica.

(ii) Considere $\lambda = 1$. Determine uma função holomorfa f tal que $f(0) = \mathrm{i}$ e a parte real de f é u.

(iii) Calcule o integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^4}\, dz$$

onde C é a circunferência de centro na origem e raio 1 percorrida uma vez no sentido directo.

8. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira e tal que $f(0) = \mathrm{i}$. Calcule

$$\int_0^{2\pi} f(4e^{\mathrm{i}t})dt.$$

9. a) Demonstre o *Teorema de Liouville:* Mostre que se f é inteira e limitada então f é constante em $\mathbb{C}$.

Sugestão: Utilize a fórmula integral de Cauchy para mostrar que $f'(z) = 0$.

b) Mostre que, se f é inteira e existem $M \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que para cada $z \in \mathbb{C}$ se tem $|f(z)| \leq M(1 + |z|^n)$, então f é um polinómio de grau menor ou igual que n.

10. Considere um caminho fechado $z : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ cuja imagem γ não contém o número complexo a, e a função $h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, definida por

$$h(t) = \int_\alpha^t \frac{z'(s)}{z(s) - a} ds.$$

(i) Verifique que

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-h(t)}\big(z(t) - a\big)\Big) = 0 \quad , \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

(ii) Usando o facto do caminho ser fechado, mostre que $e^{h(\beta)} = 1$.

(iii) Conclua que o índice de γ relativo a a, que é dado por

$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z-a} dz,$$

é um número inteiro. Intuitivamente, o índice é o "número de voltas" que o caminho γ dá em torno do ponto a, contadas positivamente no sentido directo e negativamente no sentido horário.

Soluções

1. (i) 0; (ii) π; (iii) $-\pi$; (iv) 0; (v) π.

2. (a) Uma primitiva é $z^2e^z - 2ze^z + 2e^z$; (b) Não é primitivável;

   (c) Uma primitiva é $f(x+\mathrm{i}y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + 3xy + \mathrm{i}\left(x^2y - \frac{y^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2\right)$;

   (d) Não é primitivável;

   (e) Uma primitiva é $\log(z-1) - \log(z)$ onde $\log$ denota a função logaritmo determinada pela escolha do argumento principal.

3. (i) $-\pi\,\mathrm{i}$; (ii) 0; (iii) $\frac{\pi^2 \operatorname{sh} 1}{2}$; (iv) $\pi^3\,\mathrm{i}$.

4. $0, \pm\pi\,\mathrm{i}\operatorname{ch} 1, \pm 2\pi\,\mathrm{i}\operatorname{ch} 1$.

5. $\mathrm{i}(1 - e^{-2\pi})$.

6. $-4\pi + 8\pi\,\mathrm{i}$.

7. (i) $\lambda = 0, \pm 1$; (ii) $f(x+\mathrm{i}y) = x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2y - y^3 + 1)$; (iii) $2\pi\mathrm{i}$.

8. $2\pi\mathrm{i}$.