TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2018/2019

Ficha 4: Funções Harmónicas. Integração em $\mathbb{C}$.

1. Determine uma harmónica conjugada de cada uma das funções:

(i) $u(x,y) = xy^3 - x^3y + 2x + 1$ (ii) $u(x,y) = e^{2x}\cos(2y)$

(iii) $u(x,y) = \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 2y$ (iv) $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

2. Poderá existir uma função analítica em $\mathbb{C}$ cuja parte real seja $u(x,y) = e^y x + e^x y$?

3. Este exercício ilustra (em casos muito simples) a maneira como podemos usar a análise complexa para resolver a equação de Laplace. Determine uma solução da equação de Laplace (isto é, uma função harmónica) que satisfaça as seguintes condições:

(a) u está definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$u(x,y) = x + 5 \text{ para } x^2 + y^2 = 1, \text{ e } \lim_{||(x,y)||\to\infty} u(x,y) = 5.$$

Sugestão: Considere a função $f(z) = \frac{1}{z}$.

(b) u está definida em $\mathbb{R}^2$, $u(0,0) = 1$, $u(1,0) = 1$, $u(0,1) = 3$.

(c) u está definida em $\mathbb{R}^2$ e $u(x,0) = e^x$.

4. Calcule

$$\int_\gamma \operatorname{Im} z^2 \, dz ,$$

onde γ é a curva que une 0 a $2 + 4\mathrm{i}$ ao longo:

(a) do segmento de recta (cujos extremos são aqueles dois pontos);

(b) do eixo real até 2 e depois de um segmento vertical até $2 + 4\mathrm{i}$;

(c) da parábola $y = x^2$.

5. Calcule o integral $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$, onde:

(i) $f(z) = e^{|z|^2} \operatorname{Re} z$ e γ é o segmento de recta que une os pontos 0 e $1 + \mathrm{i}$;

(ii) $f(z) = z \operatorname{Im} z^2$ e $\gamma = \{z : |z| = 1, -\pi \leqslant \arg z \leqslant 0\}$ percorrido no sentido directo;

(iii) $f(z) = z\bar{z}$ e $\gamma = \{z : |z| = 1\}$ percorrido no sentido horário;

(iv) $f(z) = 1/z$ e $\gamma(t) = e^{it}$, com $t \in [0, 8\pi]$ percorrido no sentido horário;

(v) $f(z) = e^z$ e γ é a concatenação de segmentos de recta $[0,1] \cup [1, 1+\mathrm{i}] \cup [1+\mathrm{i}, \mathrm{i}]$.

6. Calcule o integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz$, onde:

(i) $\gamma = \{z : |z| = 1,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ percorrido no sentido directo e se escolhe uma função $\sqrt{z}$ que é contínua sobre γ e verifica $\sqrt{1} = 1$;

(ii) $\gamma = \{z : |z| = 1,\ \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$ percorrido no sentido horário e se escolhe uma função $\sqrt{z}$ que é contínua sobre γ e verifica $\sqrt{-\mathrm{i}} = (1-\mathrm{i})/\sqrt{2}$.

7. Mostre que:

(i) $\displaystyle\left|\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{z}\,dz\right| \leqslant 4\pi$; (ii) $\displaystyle\left|\oint_{|z|=R} \frac{z-1}{z+1}\,dz\right| \leqslant 2\pi\frac{R(R+1)}{R-1}$ para $R > 1$;

(iii) $\displaystyle\left|\oint_\gamma \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^4}\,dz\right| \leqslant \pi\, R^{-3}$ em que $\gamma(t) = Re^{\mathrm{i}t}$ e $t \in [0,\pi]$.

8. Considere o caminho $\gamma : [0,\infty[\to \mathbb{C}$ definido por $\gamma(\theta) = e^{-\theta+\mathrm{i}\theta}$.

(a) Esboce γ.

(b) Calcule $\int_\gamma z dz$.

9. Considere as coordenadas polares usuais $(r,\theta) \in\,]0,+\infty[\, \times\,]-\pi,\pi[$, no conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leqslant 0\}$, determinadas pelas relações

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{cases}$$

Este exercício vai deduzir a expressão das equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.

(a) Seja $A = \begin{bmatrix} u & w \\ v & x \end{bmatrix}$ uma matriz real 2×2 e $r > 0$. Mostre que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} u & w \\ v & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

sse

$$u = \frac{x}{r} \quad \text{e} \quad w = -rv.$$

(b) Use a regra da derivação da função composta para mostrar que

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}.$$

(c) Conclua que uma função $f : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^- \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(re^{\mathrm{i}\theta}) = u(r,\theta) + \mathrm{i}v(r,\theta)$$

com u e v de classe C^1 em $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ é diferenciável em $re^{\mathrm{i}\theta}$ sse são satisfeitas as **equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares**

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

(d) Mostre que se $f(re^{\mathrm{i}\theta})=u(r,\theta)+\mathrm{i}\,v(r,\theta)$ é diferenciável no ponto $(r,\theta)\in\,]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ então

$$f'(re^{\mathrm{i}\theta})=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-\mathrm{i}\theta}.$$

(e) Aproveite o resultado das alíneas anteriores para determinar o domínio de diferenciabilidade das seguintes funções (tomando coordenadas polares $(r,\theta)\in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$) e calcular a derivada nos pontos desse domínio.

(i) $f(z)=\log z$, a função logaritmo determinada pela escolha do argumento principal.

(ii) $f(re^{\mathrm{i}\theta})=-r^3\theta+\mathrm{i}(\theta^3+r^2)$.

(iii) $f(re^{\mathrm{i}\theta})=\log r+r\cos\theta+\mathrm{i}(r\,\mathrm{sen}\,\theta-r\theta)$.

Soluções

1. (i) $v(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{4} - \dfrac{3x^2y^2}{2} + 2y$; (ii) $v(x,y) = e^{2x}\text{sen}\,(2y)$;

   (iii) $v(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{x}\right) - 2x$ para $x \neq 0$, (não existe uma harmónica conjugada em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$);

   (iv) $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

2. Não.

3. (a) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + 5$.

   (b) $u(x,y) = 1 + x + 2y$, por exemplo. Usando funções holomorfas pode, por exemplo, tomar-se $u(x,y) = \operatorname{Re}\big(-\mathrm{i}(z-1)(z-\mathrm{i}) + \frac{2}{1-\mathrm{i}}z(z-\mathrm{i}) - \frac{3}{1+\mathrm{i}}z(z-1)\big)$.

   (c) $u(x,y) = e^x\cos(y)$.

4. (a) $\frac{16}{3}(2+4\mathrm{i})$ (b) $32\mathrm{i}$ (c) $8 + \frac{128}{5}\mathrm{i}$

5. (i) $\frac{1+\mathrm{i}}{4}(e^2-1)$ (ii) $-\frac{\pi}{2}$ (iii) 0 (iv) $-8\pi\mathrm{i}$ (v) $-1+\cos 1 + \mathrm{i}\,\text{sen}\,1$

6. (i) $2(\mathrm{i}-1)$; (ii) $\mathrm{i}2\sqrt{2}$.

8. (a) Trata-se de uma espiral com extremidades em 1 e em 0. b) $-\frac{1}{2}$.

9. (e) (i) Diferenciável em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$. (ii) Diferenciável em $z = 2$.

   (iii) A função não é diferenciável em qualquer ponto.