TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2018/2019

Ficha 3: Diferenciabilidade complexa e holomorfia.

1. Determine ou mostre que não existe cada um dos seguintes limites.

(i) $\displaystyle\lim_{z\to -\mathrm{i}} \frac{z^2+3\mathrm{i}z-2}{z+\mathrm{i}}$; (ii) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$; (iii) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}^2}{|z|}$; (iv) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$.

2. Determine o domínio de diferenciabilidade de cada uma das seguintes funções e calcule a derivada nesse domínio.

(i) $f(z) = z^2\bar{z}$; (ii) $f(x+\mathrm{i}y) = xy - \mathrm{i}x$; (iii) $f(z) = \cos(3z) - \mathrm{i}$;
(iv) $f(z) = |z|\bar{z}$; (v) $f(x+\mathrm{i}y) = x^2 - y + \mathrm{i}(x - y^2)$;
(vi) $f(z) = e^{\bar{z}}$; (vii) $f(z) = z^5 + \operatorname{sh}(e^{z^2})$; (viii) $f(z) = \bar{z}\operatorname{Im} z$.

3. Indique o domínio de analiticidade das funções do exercício anterior.

4. Calcule as derivadas das seguintes funções. Nas funções que envolvam a utilização do logaritmo considere o valor principal e indique a região em que a fórmula obtida é válida.

(i) $\operatorname{sen}(z) + 3z^2 - ze^{z^3}$; (ii) $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$;
(iii) $\cos(z) + (2z+1)^z$; (iv) $f(z) = \log(z^2 + \mathrm{i}z)$;

5. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}|xy|$.

(a) Estude a analiticidade de $f(z)$.

(b) Calcule $f'(z)$ nos pontos onde f é analítica.

6. Sejam $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funções diferenciáveis, e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a função definida por

$$f(x+\mathrm{i}y) = \alpha(x) - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2y + \beta(y))$$

para $x, y \in \mathbb{R}$. Decida se pode ou não escolher α, β de modo a que f seja uma função inteira (isto é, holomorfa em $\mathbb{C}$). Em caso afirmativo, determine α, β de maneira a que $f(1) = \mathrm{i}$ e $f(\mathrm{i}) = -1$.

7. Considere a função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = z\left(z^2 + (\bar{z})^2 - |z|^2\right),$$

e sejam u e v funções de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}$ tais que $u(x,y) = \operatorname{Re} g(x+\mathrm{i}y)$ e $v(x,y) = \operatorname{Im} g(x+\mathrm{i}y)$.

(a) Determine o conjunto dos pontos onde u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. O que pode concluir sobre a holomorfia da função g?

(b) Determine uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa em $\mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} f = u$.

8. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4} & \text{se} \quad z \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se} \quad z = 0 \end{cases}$$

Mostre que f verifica as condições de Cauchy-Riemann no ponto $z = 0$, mas não admite derivada nesse ponto.

9. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa tal que se verifica uma das condições

(a) $\operatorname{Re} f(z) \equiv (\text{constante})$,

(b) $f'(z) \equiv 0$,

(c) $|f(z)| \equiv (\text{constante})$.

Mostre que $f(z) \equiv (\text{constante})$.

10. Atendendo a que se $z = x + \mathrm{i}y$ então $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$, dada uma função $\mathbb{R}$-diferenciável $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, representada na forma $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$, podemos sempre escrevê-la como função de z e $\bar{z}$.

a) Utilize o teorema da derivada da função composta para mostrar que:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

b) Mostre que f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann se e só se:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Nota: Este exercício mostra que as funções holomorfas são as que não dependem efectivamente de $\bar{z}$ (no sentido de que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$).

Soluções

1. (i) i; (ii) Não existe; (iii) 0; (iv) Não existe.

2. (i) $D_{\mathrm{dif}} = \{0\}$, $f'(0) = 0$; (ii) $D_{\mathrm{dif}} = \{1\}$, $f'(1) = -\mathrm{i}$;
(iii) $D_{\mathrm{dif}} = \mathbb{C}$, $f'(z) = -3\operatorname{sen}(3z)$; (iv) $D_{\mathrm{dif}} = \{0\}$, $f'(0) = 0$;
(v) $D_{\mathrm{dif}} = \{x - \mathrm{i}x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}\}$, $f'(x - \mathrm{i}x) = 2x + \mathrm{i}$, para $x \in \mathbb{R}$; (vi) $D_{\mathrm{dif}} = \emptyset$;
(vii) $D_{\mathrm{dif}} = \mathbb{C}$, $f'(z) = 5z^4 + 2ze^{z^2}\operatorname{ch}(e^{z^2})$; (viii) $D_{\mathrm{dif}} = \{0\}$; $f'(0) = 0$;

3. (i) $\emptyset$; (ii) $\emptyset$; (iii) $\mathbb{C}$; (iv) $\emptyset$; (v) $\emptyset$; (vi) $\emptyset$; (vii) $\mathbb{C}$; (viii) $\emptyset$.

4. (i) $\cos(z) + 6z - (1 + 3z^3)e^{z^3}$; (ii) $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$;
(iii) $-\operatorname{sen}(z) + 2z(2z+1)^{z-1} + (2z+1)^z \log(2z+1)$ em $\mathbb{C} \setminus \{x + 0\mathrm{i} : x \leqslant -\frac{1}{2}\}$;
(iv) $f'(z) = \frac{2z+\mathrm{i}}{z^2+\mathrm{i}z}$ em $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}y : y \geqslant 0 \text{ ou } y \leqslant -1\}$.

5. Analítica em $D = \{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} : xy > 0\}$; para $z \in D$, $f'(z) = 2z$.

6. $\alpha(x) = x^3 - 1$, $\beta(y) = -y^3 + 1$.

7. (a) Condições de Cauchy-Riemann são verificadas em $\{(0,0)\}$; g não é holomorfa.
(b) $f(x + \mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}\,\tilde{v}(x,y)$ aonde $\tilde{v}(x,y) = 3x^2y - y^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

8. Calculando as derivadas parciais pela definição, obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 1 \ , \ \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 1$$

Por outro lado, utilizando a representação em coordenadas polares $h = |h|e^{i\theta}$

$$\lim_{\substack{|h|\to 0 \\ \theta=\alpha}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = e^{4i\alpha}$$