

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2018/2019

Ficha 13: Séries de Fourier e separação de variáveis

1. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

2. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{se } \text{sen } x > 0 \\ 0 & \text{se } \text{sen } x \leq 0 \end{cases}$$

5. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

6. Considere a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Determine:

- (i) a série de senos associada a f ;
- (ii) a série de co-senos associada a f .

7. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad x \in [0, \pi], \quad \text{com } \begin{cases} u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \text{sen}(x) - 2 \text{sen}(5x). \end{cases}$$

8. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u, \quad x \in [0, L], \quad \text{com } \begin{cases} u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

9. Seja a função f definida no intervalo $[0, \pi]$ por $f(x) = \text{sen}(x)$.

(a) Determine a série de Fourier de co-senos da função f .

(b) Diga, justificando, qual o valor da soma da série de Fourier da alínea anterior para cada x no intervalo $[-\pi, \pi]$.

(c) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

10. a) Determine as soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0, \pi]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = (\pi - x)x .$$

11. Seja f a função definida no intervalo $[0, 2\pi]$ por $f(x) = x$.

(a) Determine a série de co-senos da função f .

(b) Resolva o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

12. Resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \\ u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = 1 \end{cases}$$

para $t \geq 0$, $x \in [0, 1]$ e onde c é uma constante real positiva.

13. Resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x, y \in [0, 1]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = \cos(2\pi x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = \cos(2\pi y)$$

14. Considere a equação de propagação do calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. (*)

- (a) Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é que não depende do tempo) da forma $u(x) = Ax + B$.
- (b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0, t) = T_1$, $u(L, t) = T_2$.
- (c) Resolva a equação (*) para $0 \leq x \leq 1$ e para as condições iniciais e de fronteira
- $$\begin{cases} u(0, t) = 20 \\ u(1, t) = 60 \\ u(x, 0) = 75. \end{cases}$$

15. a) Determine soluções, para $t \geq 0$ e $x \in [0, 1]$, do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \\ u(0, t) = 0, \quad \text{se } t \geq 0 \\ u(1, t) = \text{sen } 1, \quad \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = 3\text{sen}(2\pi x) - 7\text{sen}(4\pi x) + \text{sen}(x) .$$

16. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(t, x, 0) = x, \quad u(t, x, 1) = x \\ u(t, 0, y) = 0, \quad u(t, 1, y) = 1 \\ u(0, x, y) = x \\ u_t(0, x, y) = \cos(2\pi(x - y)) - \cos(2\pi(x + y)) \end{cases} .$$

para $x, y \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}^+$.

Soluções

1. $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n+1)\pi x)}{2n+1}$
2. $\frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)$. Fazendo $x = 0$ obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
3. $\frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Fazendo $x = L$ obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
4. $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\text{sen } x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos(2nx)$
5. $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \text{sen}((2n-1)\pi x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$
6. (i) $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}(n\pi x)$
(ii) $\frac{1}{2} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)\pi x)$
7. $u(t, x) = e^{-\alpha^2 t} \text{sen}(x) - 2e^{-25\alpha^2 t} \text{sen}(5\pi x)$
8. $u(t, x) = e^{-(1+9(\pi/L)^2)t} \cos(3\pi x/L)$
9. (a) $\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2-1} \cos(nx) = \frac{2}{\pi} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} \cos(2nx)\right)$
(b) $|\text{sen } x|$ (c) $u(t, x) = \frac{2}{\pi} e^{2t} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{(2-n^2)t}}{4n^2-1} \cos(2nx)$
10. (a) $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-(1+n^2)t} \text{sen}(nx)$
(b) $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi} e^{-(1+n^2)t} \text{sen}(nx) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(1+(2n+1)^2)t}}{(2n+1)^3} \text{sen}((2n+1)x)$
11. (a) $f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi} \cos\left(\frac{n}{2}x\right) = \pi - \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]$
(b) $u(t, x) = \pi e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n-1}{n^2} e^{-\frac{n^2 t + 2t^2}{4}} \cos\left(\frac{n}{2}x\right)$
12. $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2 c} \text{sen}(n\pi ct) \text{sen}(n\pi x)$
13. $u(x, y) = C + \frac{\cosh(2\pi x) \cos(2\pi y) + \cosh(2\pi y) \cos(2\pi x)}{2\pi \sinh(2\pi)}$, $C \in \mathbb{R}$
14. (b) $u(x) = T_1 + \frac{T_2-T_1}{L}x$
(c) $20 + 40x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n\pi} (3(-1)^n + 11) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t} \text{sen}(n\pi x)$
15. (a) $u(t, x) = \text{sen}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{(1-n^2\pi^2)t} \text{sen}(n\pi x)$ onde b_n são certos coeficientes reais.
(b) $u(t, x) = \text{sen}(x) + 3e^{(1-4\pi^2)t} \text{sen}(2\pi x) - 7e^{(1-16\pi^2)t} \text{sen}(4\pi x)$
16. $u(t, x, y) = x + \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \text{sen}(2\sqrt{2}\pi t), \text{sen}(2\pi x) \text{sen}(2\pi y)$.