TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2018/2019

Ficha 12: Sistemas de equações de 1ª ordem e equações lineares de ordem n - caso geral

1. Calcule e^{At} para as seguintes matrizes A.

(i) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi \end{bmatrix}$; (ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; (iii) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

(iv) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (v) $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (vi) $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$;

(vii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; (viii) $A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 2 \end{cases}$$

Sugestão: Determine uma solução particular constante.

3. Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + 2 \\ \dot{y} = 3x - y + 2 \\ \dot{z} = ty - tz \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais $x(0) = y(0) = -1, z(0) = 1$.

Sugestão: Note que as primeiras duas equações não contêm z.

4. Determine a solução geral de cada uma das equações:

(i) $y'' - 2y' - 3y = \cos t$; (ii) $y'' - 2y' + y = te^t$;

(iii) $y^{(4)} + y = t + e^{2t}\text{sen}\, t$; (iv) $y^{(3)} - 2y^{(2)} = t$.

5. Determine a solução do problema de valor inicial

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y' - 2 = b(t) \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y^{(2)}(0) = 1$$

quando: (i) $b(t) = 0$; (ii) $b(t) = t$; (iii) $b(t) = e^t$.

6. Obtenha a solução geral dos seguintes sistemas:

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} x' = y - 5e^{2t} \\ y' = 2x + y \end{cases} ; \qquad \text{(ii)} \quad \begin{cases} x' = x + y + 1 + e^t \\ y' = 3x - y \end{cases} .$$

7. Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t\sqrt{2}} \\ e^{-t} \end{bmatrix}, \qquad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & -2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

9. Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações.

(a) $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$;

(b) $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^t)$.

10. Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + 3y' + 2y = (1 + e^x)^{-1}, \qquad y(0) = -2, \ y'(0) = -\log 2.$$

11. Considere a equação diferencial

$$y'' + \frac{t}{1-t} y' + \frac{1}{1-t} y = 1 - \frac{1}{t}.$$

(a) Determine as soluções da equação homogénea da forma $y(t) = t^k$ e $y(t) = e^{\lambda t}$.

(b) Determine a solução da equação que satisfaz as condições iniciais $y(2) = 1$ e $y'(2) = -1$.

12. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ de componentes reais ou complexas.

(a) Mostre que, se A e B comutam, então $X(t) = e^{-At}e^{(A+B)t}$ satisfaz o problema de valor inicial $\frac{dX}{dt} = BX$, $X(0) = I$.

(b) Conclua que se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$.

(c) Aproveite o resultado para calcular e^{Ct}, onde $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

13. Use a identificação das matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ com os números complexos para calcular $\exp\left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} t\right)$.

14. A equação que a carga no condensador de um circuito LRC verifica é:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

em que $q(t)$ é a carga acumulada no condensador no instante t, L a indutância, R a resistência, C a capacidade do condensador e $E(t)$ a diferença de potencial imposta no instante t.

(i) Determine a carga no condensador no instante $t = 0,01$ s, de um circuito LRC com $L = 0,05$ H (Henry), $R = 2\,\Omega$ (Ohm), $C = 0,01$ F (farad) e

$$E(t) = 4,25\,\text{sen}\,(50t)$$

(correspondente a uma tensão de corrente alterna de 50 Hz e $4,25$ V), sendo $q(0) = 5$ C (Coulomb) e $q'(0) = I(0) = 0$ A (Ampére).

(ii) Supondo que $E(t) = 0$, determine o primeiro instante em que a carga no condensador é igual a zero.

Soluções

1. (i) $\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\pi t} \end{bmatrix}$; (ii) $\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$; (iii) $e^{3t}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(iv) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{4t}-e^{2t} & -3e^{4t}+3e^{2t} \\ e^{4t}-e^{2t} & -e^{4t}+3e^{2t} \end{bmatrix}$; (v) $e^{3t}\begin{bmatrix} \cos(2t)+\text{sen}\,(2t) & -2\,\text{sen}\,(2t) \\ \text{sen}\,(2t) & \cos(2t)-\text{sen}\,(2t) \end{bmatrix}$;

(vi) $e^{4t}\begin{bmatrix} t+1 & -t & 0 \\ t & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (vii) $\begin{bmatrix} \cos t+\text{sen}\,t & 2\,\text{sen}\,t & 0 \\ -\text{sen}\,t & \cos t-\text{sen}\,t & 0 \\ -\text{sen}\,t & \cos t-\text{sen}\,t-e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}$;

(viii) $\begin{bmatrix} e^{\pi t} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5}te^{\pi t} & e^{\pi t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & \sqrt{2}te^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2+c_1e^t\cos t+c_2e^t\,\text{sen}\,t \\ 3/2+c_1e^t\,\text{sen}\,t-c_2e^t\cos t \end{bmatrix}$.

3. $x(t)=-1,\ y(t)=-1,\ z(t)=-1+2e^{t^2/2}$.

4. (i) $y(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}-\frac{1}{10}\Big(\text{sen}\,t+2\cos t\Big)$ com $c_1,c_2\in\mathbb{R}$;

(ii) $y(t)=\Big(c_1+c_2t+\frac{t^3}{6}\Big)e^t$ com $c_1,c_2\in\mathbb{R}$;

(iii) $y(t) = \cos(\sqrt{2}t/2)\Big(c_1e^{\sqrt{2}t/2}+c_2e^{-\sqrt{2}t/2}\Big)+\text{sen}\,(\sqrt{2}t/2)\Big(c_3e^{\sqrt{2}t/2}+c_4e^{-\sqrt{2}t/2}\Big) - \frac{e^{2t}}{102}\Big(\text{sen}\,t+4\cos t\Big)+t$ com $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$;

(iv) $y(t)=c_1+c_2t+c_3e^{2t}-\frac{1}{8}t^2-\frac{1}{12}t^3$ com $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

5. (i) $y(t)=5-5e^t+3te^t+2t$; (ii) $y(t)=8-8e^t+4te^t+4t+\frac{t^2}{2}$;

(iii) $y(t)=4-4e^t+2te^t+2t+\frac{t^2}{2}e^t$.

6. (i) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(3c_1e^{-t}+3c_2e^{2t}-10e^{2t}-5te^{2t}\right) \\ \frac{1}{3}\left(-3c_1e^{-t}+6c_2e^{2t}-10te^{2t}-10e^{2t}\right) \end{bmatrix}$ com $c_1,c_2\in\mathbb{R}$;

(ii) $\begin{bmatrix} c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}-\frac{8}{12}e^t-\frac{1}{4} \\ c_1e^{2t}-3c_2e^{-2t}-e^t-\frac{3}{4} \end{bmatrix}$ com $c_1,c_2\in\mathbb{R}$;

7. $y(t)=\begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t}(t^2+2t) \\ e^{\sqrt{2}t}(t+1) \\ e^{-t}(t+1) \end{bmatrix}$

8. $y(t) = \frac{e^{-2t}}{\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\text{sen}\,(\pi t) \\ 1 - \cos\,(\pi t) \end{bmatrix}$

9. (a) $y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + e^t (t \log t - t)$ com $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$;

   (b) $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} - e^{-2t} \text{sen}\,(e^t)$ com $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

10. $y(x) = 3e^{-2x} - (5 + 2\log 2) e^{-x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \log\,(1 + e^x)$.

11. (a) $\lambda = k = 1$ (b) $y(t) = (2 + \log 2)t - 2e^{t-2} - 1 - t \log t$.

12. (c) $e^t \begin{bmatrix} 1 & 2t & 3t + 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

13. $\begin{bmatrix} e^{at} \cos\,(bt) & -e^{at}\,\text{sen}\,(bt) \\ e^{at}\,\text{sen}\,(bt) & e^{at} \cos\,(bt) \end{bmatrix}$.

14. (i) $4,56$ C ; (ii) $0,05$ s .