

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2018/2019

Ficha 11: Sistemas de equações de 1ª ordem e equações lineares de ordem n - caso homogéneo

1. Considere o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t(1-t)}x + \frac{t}{t-1}y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t^2(1-t)}x + \frac{2}{t(t-1)}y \end{cases} .$$

(a) Determine todas as soluções da forma $x(t) = t^\alpha$; $y(t) = t^\beta$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(b) Determine a solução do problema de valor inicial $x(2) = 0$; $y(2) = 1$.

2. Encontre a solução geral dos sistemas:

$$(i) \begin{cases} x' = x + y \\ y' = 3y - 2x \end{cases} ; \quad (ii) \begin{cases} x' = y \\ y' = 2x + y \end{cases} ; \quad (iii) \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases} ;$$

$$(iv) \begin{cases} x' = x - 2y - z \\ y' = y - x + z \\ z' = x - z \end{cases} ; \quad (v) \begin{cases} x' = -z \\ y' = y - 4z \\ z' = -4z \end{cases} ; \quad (vi) \begin{cases} x' = -y + 2z \\ y' = -x + 2z \\ z' = -x - y + 3z \end{cases} .$$

3. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Determine uma solução matricial fundamental e resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \text{ com } \mathbf{x}(0) = (1, 0, 0).$$

4. Determine a solução geral do sistema

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \frac{dy_3}{dt} \\ \frac{dy_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Sugestão: Note que pode começar por determinar $y_1(t)$.

5. Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \\ z' = y - (\sin t)z \end{cases}$$

que verifica a condição inicial $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

Sugestão: Comece por determinar $x(t)$ e $y(t)$.

6. Justifique que o problema de valor inicial

$$(t^2 + y^2) y''' = \text{sen}(t) y'' + e^y, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

tem uma solução única.

7. Determine a solução geral de cada uma das equações:

(i) $y^{(3)} - 2y^{(2)} = 0$;

(ii) $(D + 2)^2(D^2 - 2D + 5)^3(D - 1)y = 0$;

(iii) $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$.

8. Resolva os problemas de valor inicial:

(i) $y''' - y'' + y' - y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = -y''(0) = 1$;

(ii) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = 1$ e $y''(0) = 4$;

(iii) $y''' + 5y'' + y' = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

9. Considere a equação

$$y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5y' = 0$$

(i) Determine a sua solução geral.

(ii) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm soluções convergentes quando $t \rightarrow \infty$.

10. Seja A uma matriz real 2×2 com valores próprios $a \pm bi$, com $b \neq 0$. Mostre que as soluções não nulas do sistema

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

descrevem elipses centradas na origem quando $a = 0$, e espirais centradas na origem quando $a \neq 0$.

Soluções

1. (a) $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ ou $(\alpha, \beta) = (0, -2)$.
 (b) $x(t) = -4 + 2t$; $y(t) = 2 - \frac{4}{t^2}$ com $t \in]1, +\infty[$.
2. (i) $e^{2t} \begin{bmatrix} (-c_1 + c_2) \operatorname{sen} t + c_1 \cos t \\ (-2c_1 + c_2) \operatorname{sen} t + c_2 \cos t \end{bmatrix}$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
 (ii) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3}(3c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{2t}) \\ \frac{1}{3}(-3c_1 e^{-t} + 6c_2 e^{2t}) \end{bmatrix}$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
 (iii) $\begin{bmatrix} (c_1 + c_2 t)e^{2t} \\ (c_1 + c_2 + c_2 t)e^{2t} \end{bmatrix}$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
 (iv) $\begin{bmatrix} c_2 + 3c_3 e^{2t} \\ c_1 e^{-t} - 2c_3 e^{2t} \\ -2c_1 e^{-t} + c_2 + c_3 e^{2t} \end{bmatrix}$ com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;
 (v) $\begin{bmatrix} c_1 + \frac{c_3}{4} e^{-4t} \\ c_2 e^t + \frac{4}{5} c_3 e^{-4t} \\ c_3 e^{-4t} \end{bmatrix}$ com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;
 (vi) $\begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 t e^t \\ (2c_3 - c_1 - c_2) e^t + c_2 t e^t \\ c_2 t e^t + c_3 e^t \end{bmatrix}$ com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
3. $Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{2t} & 0 \\ 1 & 0 & e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$; solução do problema de valor inicial: $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
4. $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha e^{-2t} \\ 3\alpha t e^{-2t} + \beta e^{-2t} + 1 \\ \delta e^t \cos(2t) + \gamma e^t \operatorname{sen}(2t) \\ -\delta e^t \operatorname{sen}(2t) + \gamma e^t \cos(2t) \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$.
5. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ 2 \operatorname{sen} t \\ 2 - e^{-1+\cos t} \end{bmatrix}$.
6. A equação é equivalente ao sistema de três equações de primeira ordem $\frac{dx}{dt} = \left(x_2, x_3, \frac{\operatorname{sen}(t)x_3 + e^{x_1}}{t^2 + x_1^2} \right)$ que tem solução única pelo teorema de Picard.

7. (i) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t}$ com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;
(ii) $y(t) = (A + Bt)e^{-2t} + (C + Dt + Et^2)e^t \cos 2t + (F + Gt + Ht^2)e^t \sin 2t + Ie^t$ com $A, B, C, D, E, G, H, I \in \mathbb{R}$;
(iii) $y(t) = c_1 \cos t + c_2 t \cos t + c_3 \sin t + c_4 t \sin t$ com $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.
8. (i) $y(t) = \cos t + \sin t$; (ii) $y(t) = 4e^t - 3e^{2t} + 3te^{2t}$; (iii) $y(t) = 0$.
9. (i) $y(t) = c_1 + e^{2t}(c_2 \cos t + c_3 \sin t)$ com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;
(ii) $y(0) = \alpha \in \mathbb{R}, y'(0) = y''(0) = 0$.