

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2018/2019

Ficha 10: Existência, unicidade, prolongamento e comparação de soluções

1. Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 6t\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

diferente da solução $y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

2. Considere o seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} (1-t)y \frac{dy}{dt} = 1 - y^2 \\ y(1/2) = 2, \end{cases}$$

- (i) Determine uma solução do PVI, e justifique que existe uma vizinhança de $1/2$ na qual essa solução é única.
- (ii) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em \mathbb{R} .
- (iii) Diga, justificando, porque não há contradição ao teorema de Picard.
3. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y^2, \quad y(0) = 1.$$

- (a) Determine a solução indicando o seu intervalo máximo de definição.
- (b) Sendo T o operador de Picard associado a este problema e $y_0(t) = 1$. Determine $y_n = T^n(y_0)$ para $n = 1, 2$ e 3 .
4. (a) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1 + y^2) \quad , \quad y(1) = 0$$

indicando o seu intervalo máximo de definição.

(b) Considere agora o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1 + y^2)e^y, \quad y(1) = 0.$$

Justifique que a solução deste problema existe e é única e mostre que o intervalo máximo de definição da solução é limitado superiormente.

5. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y + e^{-(t+y^4)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Justifique que a solução deste problema existe e é única. Mostre que o intervalo máximo de definição da solução contém $[0, +\infty[$ e determine $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

6. Considere o problema de valor inicial

$$(e^y + \sin^4 y) \frac{dy}{dt} = y - y^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Mostre que o intervalo máximo de definição da solução é \mathbb{R} e que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$.

7. Considere a equação:

$$\frac{dy}{dt} = \cos(t + e^y).$$

(a) Justifique que a solução de qualquer problema de valor inicial existe e é única.

(b) Mostre que a solução do problema de valor inicial com $y(0) = 0$ satisfaz $|y(t)| \leq |t|$ para todo o $t \in \mathbb{R}$.

(c) Mais geralmente, para o problema de valor inicial que satisfaz $y(t_0) = y_0$, mostre que

$$|y(t) - y_0| \leq |t - t_0|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

8. (a) Se $x(t)$ é a solução de uma equação diferencial $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$, determine uma equação satisfeita pela função $y(t) = x(-t)$.

(b) Sejam $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e considere os problemas de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0; \quad \frac{dw}{dt} = g(t, w), \quad w(t_0) = \|x_0\|.$$

Use a alínea anterior para mostrar que se

$$g(t, \|x\|) \leq -\|f(t, x)\|$$

então $\|x(t)\| \leq w(t)$ para todos os valores de $t \leq t_0$ para os quais as soluções estejam ambas definidas.

(c) Mostre que todas as soluções do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ye^{-x^2} + 1 \\ \frac{dy}{dt} = \text{sen}(xy)x \end{cases}$$

têm \mathbb{R} como intervalo máximo de definição.

Soluções

2. (i) $y(t) = \sqrt{1 + 12(1 - t)^2}$.

3. (a) $\frac{1}{1-t}$ definida em $] -\infty, 1[$.

(b) $y_1(t) = 1+t$; $y_2(t) = 1+t+t^2 + \frac{t^3}{3}$; $y_3(t) = 1+t+t^2+t^3 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{1}{3}t^5 + \frac{1}{9}t^6 + \frac{1}{63}t^7$.

4. (a) $y(t) = \operatorname{tg} \frac{t^2-1}{2}$, $t \in] -\sqrt{\pi+1}, \sqrt{\pi+1}[$.

5. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$.

7. (a) $\frac{dy}{dt} = -f(-t, y(t))$.