Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2018/2019

Ficha 1: Números complexos

1. Escreva uma expressão da forma $re^{i\theta}$, para cada um dos números complexos

(i) i^3; (ii) $1-\mathrm{i}$; (iii) $\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$; (iv) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$; (v) $2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$;

(vi) $(1-\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})$; (vii) $(1-\mathrm{i})^{-1}$; (viii) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})/(1+\mathrm{i})$; (ix) $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^3$.

2. Escreva uma expressão da forma $x+\mathrm{i}y$, $(x,\, y \in \mathbb{R})$, para cada um dos números complexos

(i) $e^{\pi\,\mathrm{i}/4}$; (ii) $5e^{-\pi\,\mathrm{i}}$; (iii) $2e^{3\,\pi\,\mathrm{i}/2}$; (iv) $e^{4\,\pi\,\mathrm{i}/3}$; (v) $e^{7\,\pi\,\mathrm{i}/6}$;

(vi) $\overline{2\mathrm{i}(\frac{1}{2}-\mathrm{i})}$; (vii) $(1+2\mathrm{i})^2+4\mathrm{i}^3$; (viii) $\dfrac{1-\alpha\mathrm{i}}{1+\alpha\mathrm{i}}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Calcule, para $n = 1, 2, 3, \ldots$,

(i) i^n; (ii) $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^n$; (iii) $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$;

4. Encontre todos os valores da raiz

(i) $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$; (ii) $\sqrt{2-2\sqrt{3}\mathrm{i}}$; (iii) $\sqrt[4]{-1}$; (iv) $\sqrt[3]{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}$.

5. Se $z_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$ determine os valores de $z_1\bar{z}_1$, $(\bar{z}_1)^4$ e de $\sqrt[5]{z_1}$.

6. Determine as soluções das seguintes equações:

(i) $(1-z)^6 = (1+z)^6$; (ii) $1-z+z^2 = 0$;

(iii) $1-z^2+z^4-z^6 = 0$; (iv) $1+z+z^2+\ldots+z^7 = 0$;

(v) $z^4-4z^3+6z^2-4z-15 = 0$.

7. Esboce os subconjuntos de $\mathbb{C}$ dados por:

(i) $|z+1-\mathrm{i}| = 4$; (ii) $|z-3\mathrm{i}| = |z+\mathrm{i}|$; (iii) $\mathrm{Im}(z+\mathrm{i}) < 2$;

(iv) $|z+2\mathrm{i}| \geq 2$; (v) $|z-1| \geq |z-1-\mathrm{i}|$; (vi) $\mathrm{Im}[(z+\mathrm{i})/2\mathrm{i}] < 0$;

(vii) $\operatorname{Re} z \neq 0$; (viii) $1 < |z-1| < 2$; (ix) $|z|^2 > z + \overline{z}$;

(x) $|z+\mathrm{i}| + |z-3\mathrm{i}| < 6$.

8. Mostre que os pontos do plano de Argand representados pelos números complexos $z_1 = 2+\mathrm{i}$, $z_2 = 4+3\mathrm{i}$, $z_3 = 2+5\mathrm{i}$ e $z_4 = 3\mathrm{i}$ representam os vértices de um quadrado.

9. Mostre que, para $x \in \mathbb{R}$ se tem

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+\mathrm{i}x}{x-\mathrm{i}\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{i}.$$

10. Mostre que $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \left(\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right)$.

Soluções

1. (i) $e^{3\pi i/2}$ (ii) $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ (iii) $2e^{i\pi/4}$ (iv) $2e^{-i\pi/6}$ (v) $4e^{-i\pi/3}$ (vi) $2e^{i\pi}$
(vii) $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}$ (viii) $\sqrt{2}e^{-i\,5\pi/12}$ (ix) $8e^{i\pi}$.

2. (i) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. (ii) -5 (iii) $-2i$. (iv) $-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right)$. (v) $-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$. (vi) $2-i$.
(vii) -3. (viii) $\frac{1-\alpha^2-2\alpha i}{1+\alpha^2}$.

3. (i) $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}1 & \text{se } n=4k\\ i & \text{se } n=4k+1\\ -1 & \text{se } n=4k+2\\ -i & \text{se } n=4k+3\end{cases}$ para $k\in\mathbb{N}$ (ii) $e^{-in\pi/2}$

(iii) $2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}$

4. (i) $\{e^{i\pi/6},\, e^{5\pi i/6},\, -i\}$ (ii) $\{\pm\, 2e^{-\pi i/6}\}$ (iii) $\{e^{-i\pi/4},\, e^{i\pi/4},\, e^{3\pi i/4},\, e^{5\pi i/4}\}$
(iv) $\{\sqrt[3]{2}\, e^{i\pi/12},\ \sqrt[3]{2}\, e^{3i\pi/4},\ \sqrt[3]{2}\, e^{17i\pi/12}\}$

5. $z_1\bar{z}_1=1, (\bar{z}_1)^4=e^{4\pi\, i/3}$ e $\sqrt[5]{z_1}=e^{i\,\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{5}}$ com $k=0,1,2,3,4$.

6. (i) $z\in\{0,\, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3},\, \frac{i}{\sqrt{3}},\, -\frac{i}{\sqrt{3}}\}$ (ii) $z=\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$
(iii) $z\in\{-1,\, 1,\, e^{-i\pi/4},\, e^{i\pi/4},\, e^{3\pi i/4},\, e^{5\pi i/4}\}$ (iv) $z\in\{-1,\, i,\, -i,\, e^{-i\pi/4},\, e^{i\pi/4},\, e^{3\pi i/4},\, e^{5\pi i/4}\}$
(v) $z\in\{3, 1+2i, -1, 1-2i\}$

7. (i) Circunferência com centro em $-1+i$ de raio 4. (ii) Recta horizontal com ordenada 1.
(iii) Região abaixo da recta da alínea anterior.
(iv) O complementar do interior do círculo de raio 2 e centrado em $-2i$.
(v) Região acima da, ou na, recta horizontal de ordenada $\frac{1}{2}$.
(vi) Semi-plano à direita do eixo dos yy. (vii) O complementar do eixo dos yy.
(viii) Região compreendida entre as circunferências de raio 1 e 2 centradas em 1.
(ix) Exterior do círculo de raio 1 centrado em 1.
(x) Elipse com focos em $-i$ e $3i$, eixo vertical de comprimento 6 e horizontal de comprimento $2\sqrt{5}$.

8. Verifique que os comprimentos dos lados do polígono e das suas diagonais são iguais; em alternativa, considere os pontos $w_j=z_j-(2+3i)$, $j=1,2,3,4$ e verifique que w_j^4 tem o mesmo valor para $j=1,2,3,4$.