

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2018/2019, 16/01/2019

Testes de Recuperação / Exame — versão B

LEIC-T, LEGI, LEE, LETI

1º Teste / Exame (1ª parte)

[2,5 val.]

1. Considere a função definida em \mathbb{R}^2 por

$$u(x, y) = x - 2xy + e^{-y} \cos(x)$$

- (a) Determine a função inteira $f = u + iv$ que verifica $f(0) = 1$;
 (b) Calcule, justificando, o valor do integral

$$\oint_{|z|=2019} \frac{f(z)}{(z - \frac{\pi}{2})^2} dz,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

[1,0 val.]

2. Considere a função definida por

$$f(z) = \log(1 + z^3)$$

onde \log é a função logaritmo correspondente à escolha do argumento principal. Determine o domínio de analiticidade da função f e calcule $f'(z)$.

[3,0 val.]

3. Considere a função de variável complexa f definida por

$$f(z) = \frac{1 + 2iz - z^2}{1 + z^2} + \frac{1}{(z + i)^2} + (z + \pi) \cos\left(\frac{1}{z + \pi}\right).$$

- (a) Determine e classifique todas as singularidades de f ;
 (b) Indique o raio de convergência da série de Taylor de f centrada no ponto $z = -3$;
 (c) Calcule, justificando, os integrais

$$\oint_{|z|=2} f(z) dz \quad \text{e} \quad \oint_{|z|=1} f(z - \pi) dz$$

onde as curvas de Jordan são percorridas no sentido directo.

[2,5 val.]

4. Usando o teorema dos resíduos, calcule o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{1 + (x + 1)^2} dx$$

[1,0 val.]

5. Seja a_n uma sucessão em \mathbb{C} tal que a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ tem raio de convergência não nulo. Mostre a função definida por

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{z}{n}\right)^n$$

é inteira, i. e. analítica em \mathbb{C} .

2º Teste / Exame (2ª parte) — B

6. Considere o seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$y^2 + \frac{1}{t} + \left(ty + \frac{1}{t} \right) \frac{dy}{dt} = 0, \quad y(1) = 0.$$

[1,0 val.] (a) Calcule um factor integrante da forma $\mu = \mu(t)$ para a equação diferencial.

[1,0 val.] (b) Determine explicitamente a solução $y = y(t)$ do PVI dado.

Sugestão: Caso não tenha resolvido a alínea (a), mostre que $\mu(t) = t$ é um factor integrante para a equação diferencial; note que isso valerá somente cotação parcial na alínea (a).

[2,0 val.] 7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule e^{At} e resolva o problema de valor inicial

$$x' = Ax, \quad x(1) = (1, 0).$$

[2,0 val.] 8. Determine a solução geral da equação diferencial

$$y''' - 4y' = \cos(t).$$

[3,0 val.] 9. Considere o problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} &= 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{para } x \in]0, 1[, t > 0 \\ (2) \quad u(t, 0) &= u(t, 1) = \alpha && \text{para } t > 0 \\ (3) \quad u(0, x) &= f(x) && \text{para } x \in [0, 1], \end{aligned}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e f é uma função seccionalmente C^1 em $[0, 1]$.

- (a) Determine a solução do problema para $\alpha = 0$ e $f(x) = 4 \sin(3\pi x) + 10 \sin(5\pi x)$.
- (b) Determine a solução do problema para $\alpha = 2$ e $f(x) = 1$

Sugestão para a alínea (b): Calcule uma solução $u(t, x) = v(x)$ para (1) + (2) e use a mudança de variável $w = u - v$ para resolver (1) + (2) + (3).

[1,0 val.] 10. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{1 - y^2}{1 + e^{-ty^2}} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

tem solução única, prolongável a \mathbb{R} , e calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.