Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2018/2019, 16/01/2019

Testes de Recuperação / Exame — versão A

LEIC-T, LEGI, LEE, LETI

1º Teste / Exame (1ª parte)

[2,5 val.] 1. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$u(x,y) = x^2 + y - y^2 + e^{-y}\,\mathrm{sen}(x)$$

(a) Determine a função inteira $f = u + \mathrm{i}v$ que verifica $f(\mathrm{i}) = 0$;

(b) Calcule, justificando, o valor do integral

$$\oint_{|z|=2019} \frac{f(z)}{(z-\frac{\pi}{2})^2}\,dz,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido horário.

[1,0 val.] 2. Considere a função definida por

$$f(z) = \log(1 - z^3)$$

onde $\log$ é a função logaritmo correspondente à escolha do argumento principal. Determine o domínio de analiticidade da função f e calcule $f'(z)$.

[3,0 val.] 3. Considere a função de variável complexa f definida por

$$f(z) = \frac{1 - 2\mathrm{i}z - z^2}{1+z^2} + \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} + (z-3)^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z-3}\right)$$

(a) Determine e classifique todas as singularidades de f;

(b) Indique o raio de convergência da série de Taylor de f centrada no ponto $z = \pi$;

(c) Calcule, justificando, os integrais

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,dz \qquad \text{e} \qquad \oint_{|z|=1} f(z+3)\,dz$$

onde as curvas de Jordan são percorridas no sentido directo.

[2,5 val.] 4. Usando o teorema dos resíduos, calcule o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{1+(x-1)^2}\,dx$$

[1,0 val.] 5. Seja a_n uma sucessão em $\mathbb{C}$ tal que a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ tem raio de convergência não nulo. Mostre a função definida por

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{z}{n}\right)^n$$

é inteira, i. e. analítica em $\mathbb{C}$.

$2^{\underline{o}}$ Teste / Exame ($2^{\underline{a}}$ parte) — A

6. Considere o seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$y^2 - y^3 + \left(xy - 2xy^2\right)\frac{dy}{dx} = 0, \qquad y(1) = -1\,.$$

[1,0 val.] (a) Calcule um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ para a equação diferencial;

[1,0 val.] (b) Determine explicitamente a solução $y = y(x)$ do PVI dado.

Sugestão: *Caso não tenha resolvido a alínea (a), mostre que $\mu(y) = y^{-1}$ é um factor integrante para a equação diferencial; note que isso valerá somente cotação parcial na alínea (a).*

[2,0 val.] 7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule e^{At} e resolva o problema de valor inicial

$$x' = Ax, \qquad x(-1) = (0,1).$$

[2,0 val.] 8. Determine a solução geral da equação diferencial

$$y''' - y' = \operatorname{sen}(2t).$$

[3,0 val.] 9. Considere o problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{array}{lll} (1) & \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{para} \quad x \in]0,\pi[\ ,\ t > 0 \\ (2) & u(t,0) = u(t,\pi) = \alpha & \text{para} \quad t > 0 \\ (3) & u(0,x) = f(x) & \text{para} \quad x \in [0,\pi], \end{array}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e f é uma função seccionalmente C^1 em $[0,\pi]$.

(a) Determine a solução do problema para $\alpha = 0$ e $f(x) = 3\operatorname{sen}(2x) + 8\operatorname{sen}(6x)$;

(b) Determine a solução do problema para $\alpha = 1$ e $f(x) = 2$.

Sugestão para a alínea (b): Calcule uma solução $u(t,x) = v(x)$ para $(1) + (2)$ e use a mudança de variável $w = u - v$ para resolver $(1) + (2) + (3)$.

[1.0 val.] 10. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1 - y^2}{1 + e^{-ty^2}} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

tem solução única, prolongável a $\mathbb{R}$, e calcule $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.