

Análise Complexa e Equações Diferenciais
 1º Semestre 2018/2019

2º Teste, versão B

(CURSOS: LEIC-T, LEGI, LEE, LETI)

15 de Dezembro de 2018, 9h30m

Duração: 1h 30m

[2,0 val.] 1. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = t \left(\frac{1}{y} + y \right).$$

Determine a solução da equação que satisfaz $y(0) = 1$, indicando o intervalo máximo de existência e unicidade da solução.

[2,0 val.] 2. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Calcule a solução que satisfaz as condições iniciais $x(0) = 3$ e $y(0) = 4$.

[2,0 val.] 3. Determine a solução geral da equação $y'' - 5y' + 6y = e^{3t}$.

[2,5 val.] 4. Considere a função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - |x|$

- (a) Determine a série de Fourier de f e estude-a quanto à convergência pontual em $[-1, 1]$.
- (b) Determine a solução do problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - tu & \text{para } 0 < x < 1, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0 & \text{para } t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & \text{para } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

[1,5 val.] 5. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{(1+y)(1+e^{-\alpha t y})}{2 + \sin(t+y)} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

aonde $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Mostre que:

- (a) O problema admite solução única numa vizinhança de $t_0 = 0$;
- (b) O intervalo máximo de existência de solução contém $[0, +\infty[$;
- (c) A solução $y(t)$ não é limitada para $t > 0$.