Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2018/2019

2º Teste, versão A

(CURSOS: LEIC-T, LEGI, LEE, LETI)

15 de Dezembro de 2018, 9h30m

Duração: 1h 30m

[2,0 val.] 1. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{e^y} + 1\right).$$

Determine a solução da equação que satisfaz $y(0) = 0$, indicando o intervalo máximo de existência e unicidade da solução.

Resolução: A equação pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1+e^y}{e^y}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^y}{1+e^y}\frac{dy}{dx} = x,$$

e é portanto separável. Temos então que

$$\frac{e^y}{1+e^y}\frac{dy}{dx} = x \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\log(1+e^y) = x \Leftrightarrow \log(1+e^y) = \frac{x^2}{2} + C$$

e a solução geral é dada implícitamente por

$$e^y = -1 + e^C e^{\frac{x^2}{2}}$$

onde C designa uma constante real. Atendendo ao valor inicial $y(0) = 0$ obtemos

$$e^C = 2$$

e resolvendo em ordem a y

$$y = y(x) = \log\left(2e^{\frac{x^2}{2}} - 1\right), \qquad \text{para } x \in \mathrm{I}_{\max}$$

onde $\mathrm{I}_{\max}$ é o intervalo máximo de existência e unicidade da solução. Para determinar $\mathrm{I}_{\max}$ note-se que

$$e^{\frac{x^2}{2}} > \frac{1}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

enquanto que a unicidade da solução decorre de, ao PVI

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = x\left(\frac{1}{e^y} + 1\right),$$

corresponder uma função f, de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Conclui-se que $\mathrm{I}_{\max} = \mathbb{R}$.

[2,0 val.] 2. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Calcule a solução que satisfaz as condições iniciais $x(0) = 1$ e $y(0) = 2$.

Resolução:

Para determinar a solução geral do sistema temos

$$\begin{cases} x' = x + 3y + 3 \\ y' = 5y + 5 \end{cases}$$

A equação em y é

$$y' = 5y + 5 \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = e^{5t}\left(C + P\left[e^{-5t}5\right]\right) = Ce^{5t} - 1$$

e do valor inicial

$$y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 3.$$

A equação em x reduz-se a

$$x' = x + 9e^{5t} \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = e^{t}\left(D + P\left[e^{-t}\,9e^{5t}\right]\right) = De^{t} + \frac{9}{4}e^{5t}$$

com

$$x(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{5}{4}.$$

A solução do PVI é

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4}\left(9e^{5t} - 5e^{t}\right) \\ y(t) = 3e^{5t} - 1 \end{cases}$$

[2,0 val.] 3. Determine a solução geral da equação $y'' + 4y' - 5y = 3e^{t}$.

Resolução: A equação escreve-se na forma

$$\left(D^2 + 4D - 5\right) y = 3e^{t}, \tag{1}$$

onde $D = \frac{d}{dt}$. Além disso, o termo independente $h(t) = 3e^{t}$ é solução da equação diferencial

$$(D - 1)h = 0,$$

i. e. $D - 1$ é o polinómio aniquilador de $3e^{t}$.

Então a solução de (1) é também solução da equação homogénea

$$(D - 1)\left(D^2 + 4D - 5\right) y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D - 1)^2(D + 5)y = 0.$$

Para a solução escrevemos

$$y(t) = \underbrace{C_1 e^{t} + C_2 e^{-5t}}_{y_h(t)} + \underbrace{C_3\, t\, e^{t}}_{y_p(t)}, \tag{2}$$

onde $C_1, \ldots, C_3$ são constantes reais. Para que (2) seja solução de (1), é necessário que

$$y_p'' + 4y_p' - 5y_p = 3e^{t} \quad \Leftrightarrow \quad 6C_3\, e^{t} = 3e^{t} \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{1}{2}$$

Assim a solução geral da equação (1) é

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-5t} + \frac{1}{2}\, t\, e^t.$$

[2,5 val.] 4. Considere a função $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 - |x|$

(a) Determine a série de Fourier de f e estude-a quanto à convergência pontual em $[-2, 2]$.

(b) Determine a solução do problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\, u & \text{para} \quad 0 < x < 2\ ,\ t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 2) = 0 & \text{para} \quad t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Resolução:

(a) A função f é seccionalmente C^1 porque é de classe C^1 em $]-2, 0[\cup]0, 2[$ e as derivadas laterais

$$f'(0^+) = -1, \quad f'(0^-) = 1, \quad f'(-2^+) = 1, \quad f'(2^-) = -1,$$

existem e são finitas. Então a série de Fourier de f é convergente em $[-2, 2]$ e é da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

porque f tem paridade par. Os coeficientes de Fourier são dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\, dx = \int_0^2 (2 - x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\, dx \\ &= \left[(2 - x)\frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 - \int_0^2 (-1)\frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\, dx \\ &= 0 - \left[\frac{4}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}\left(1 - (-1)^n\right), \qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

$$a_0 = \int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^2 (2 - x)\, dx = 2.$$

Assim a soma $s(x)$, da série de Fourier de f, é dada por

$$\begin{aligned} s(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}\left(1 - (-1)^n\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \\ &= \begin{cases} f(x) = 2 - |x| & \text{para } -2 < x < 2 \\ (f(2^-) + f(-2^+))/2 = 0 & \text{se } x = \pm 2 \end{cases} \end{aligned}$$

onde se toma em consideração que f é contínua em]-2,2[.

(b) Vamos procurar soluções não nulas da forma $u(x,t) = T(t)X(x)$ para a equação diferencial parcial e condições auxiliares homogéneas. Substituindo na equação diferencial, obtemos:

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) + t\,T(t)X(x) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} - t = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

onde λ é um número real qualquer. Esta igualdade é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} T'(t) = (\lambda + t)T(t) \\ X''(x) - \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

Das condições de fronteira, $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,2) = 0$ resulta, para as soluções não nulas da forma $T(t)X(x)$, que

$$T(t)X'(0) = T(t)X'(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(2) = 0 \end{cases}$$

Resolvemos, em primeiro lugar, o problema (para $x \in [0,2]$):

$$X'' - \lambda X = 0 \qquad ; \qquad X'(0) = X'(2) = 0. \tag{3}$$

O polinómio característico da equação diferencial, $(D^2 - \lambda)X = 0$, tem raízes $\pm\sqrt{\lambda}$, pelo que a expressão para as soluções da equação (3) dependem do sinal de λ. Temos

$$X(x) = \begin{cases} Be^{x\sqrt{\lambda}} + Ce^{-x\sqrt{\lambda}} & \text{se } \lambda > 0 \\ Bx + C & \text{se } \lambda = 0 \\ B\cos\left(x\sqrt{-\lambda}\right) + C\,\mathrm{sen}\left(x\sqrt{-\lambda}\right) & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

onde B e C são constantes reais. Impondo as condições de fronteira às soluções, $X(x)$, acima determinadas, temos

(i) Para $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} B - C = 0 \\ \sqrt{\lambda}\left(Be^{2\sqrt{\lambda}} - Ce^{-2\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = B \\ B(e^{2\sqrt{\lambda}} - e^{-2\sqrt{\lambda}}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

donde $X(x) = 0$ é trivial.

(ii) Para $\lambda = 0$ resulta que $B = 0$ e $X(x) = C$ onde C é uma constante real.

(iii) Para $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} C = 0 \\ \sqrt{-\lambda}\left(-B\,\mathrm{sen}\left(2\sqrt{-\lambda}\right) - C\cos\left(2\sqrt{-\lambda}\right)\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ B = 0 \text{ ou } \sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{2} \end{cases}$$

donde obtemos as soluções $X(x) = B\cos(\frac{n\pi x}{2})$ com $n = 1, 2, \ldots$ (correspondem a $\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{2}$ e $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{4}$).

Em consequência, as soluções do problema (3) são:

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{4} \qquad , \qquad X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \qquad , \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Substituindo os possíveis valores de λ na equação para T e juntando a condição inicial já obtida, temos:

$$T' = \left(t - \frac{n^2\pi^2}{4}\right)T.$$

As soluções desta equação são da forma $T(t) = Ke^{t^2/2-n^2\pi^2 t/4}$, com $K \in \mathbb{R}$. As soluções da equação diferencial da forma $T(t)X(x)$ que satisfazem as condições de fronteira são (a menos do produto por uma constante) funções da forma:

$$Ke^{t^2/2-n^2\pi^2 t/4} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \qquad \text{com} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Atendendo à linearidade da equação diferencial podemos resolver a condição inicial

$$u(0, x) = f(x) = 2 - |x|$$

usando as soluções

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n e^{t^2/2-n^2\pi^2 t/4} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Assim os coeficientes K_n são os coeficientes de Fourier da série obtida na alínea anterior

$$K_0 = 1 \quad \text{e} \quad K_n = \frac{4}{n^2\pi^2}\left(1 - (-1)^n\right)$$

e a solução do problema é:

$$u(x, t) = e^{t^2/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}\left(1 - (-1)^n\right) e^{t^2/2-n^2\pi^2 t/4} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

[1,5 val.] 5. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{(1+y)\left(1+e^{-\alpha\, ty}\right)}{2+\operatorname{sen}(t+y)} \\ \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

aonde $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Mostre que:

(a) O problema admite solução única numa vizinhança de $t_0 = 0$;
(b) O intervalo máximo de existência de solução contém $[0, +\infty[$;
(c) A solução $y(t)$ não é limitada para $t > 0$.

Resolução:

(a) A existência e unicidade da solução do PVI decorre de

$$f(t, y) = \frac{(1+y)\left(1+e^{-\alpha\, ty}\right)}{2+\operatorname{sen}(t+y)},$$

ser uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

(b) Por um lado, a desigualdade

$$f(t, y) \leqslant 2(1+y),$$

é válida para qualquer $t >$ e $y > 0$. Por outro lado, a solução do PVI é estritamente crescente para $t > 0$, i. e. $\frac{dy}{dt} > 0$ com $y(0) > 0$. Podemos então estabelecer a comparação com a solução h do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = 2(1+h) \\ \\ h(0) = \alpha. \end{cases}$$

que é única, porque $(t,h) \mapsto 2(1+h)$ é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Agora

$$y(t) \leqslant h(t) = (1+\alpha)e^{2t} - 1, \qquad \text{para } t > 0,$$

garante que $y(t)$ não explode em tempo finito, i. e. não existe $t_* > 0$ tal que $\lim_{t\to t_*} y(t) = +\infty$. Concluímos que o intervalo máximo de existência de solução contém $[0, +\infty[$.

(c) Analogamente, a desigualdade

$$\frac{1+y}{3} \leqslant f(t,y),$$

é válida para qualquer $t >$ e $y > 0$. Agora estabelecemos a comparação com a solução z do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1+z}{3} \\ \\ z(0) = \alpha. \end{cases}$$

que é única, porque $(t,z) \mapsto \frac{1+z}{3}$ é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Finalmente

$$z(t) = (1+\alpha)e^{t/3} - 1 \leqslant y(t), \qquad \text{para } t > 0,$$

garante que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$ pelo que $y(t)$ não é limitada para $t > 0$.