Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2018/2019

2º Teste, versão A

(Cursos: LEIC-T, LEGI, LEE, LETI)

15 de Dezembro de 2018, 9h30m

Duração: 1h 30m

[2,0 val.] 1. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{e^y} + 1\right).$$

Determine a solução da equação que satisfaz $y(0) = 0$, indicando o intervalo máximo de existência e unicidade da solução.

[2,0 val.] 2. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Calcule a solução que satisfaz as condições iniciais $x(0) = 1$ e $y(0) = 2$.

[2,0 val.] 3. Determine a solução geral da equação $y'' + 4y' - 5y = 3e^t$.

[2,5 val.] 4. Considere a função $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 - |x|$

(a) Determine a série de Fourier de f e estude-a quanto à convergência pontual em $[-2, 2]$.

(b) Determine a solução do problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\,u & \text{para} \quad 0 < x < 2\,,\ t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 2) = 0 & \text{para} \quad t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

[1,5 val.] 5. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{(1+y)\left(1+e^{-\alpha\, ty}\right)}{2+\operatorname{sen}(t+y)} \\ \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

aonde $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Mostre que:

(a) O problema admite solução única numa vizinhança de $t_0 = 0$;

(b) O intervalo máximo de existência de solução contém $[0, +\infty[$;

(c) A solução $y(t)$ não é limitada para $t > 0$.