Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2018/2019

1º Teste, versão B

(Cursos: LEIC-T, LEGI, LEE, LETI)

3 de Novembro de 2018, 9h30m

Duração: 1h 30m

[3,0 val.] 1. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2y + x(3 - 2y)$.

a) Determine uma função inteira $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) \qquad \text{e} \qquad f(0) = -\mathrm{i}.$$

b) Indique, justificando, o valor do número complexo z_0 tal que

$$\oint_{|z+1|=2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

[1,0 val.] 2. Seja C uma curva seccionalmente regular que une $\sqrt[3]{\pi}$ a i. Calcule, justificando, o valor do integral

$$\int_C z^2 \cos(z^3)\, dz.$$

[2,5 val.] 3. a) Considere a função definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z - 3\mathrm{i})^2} + \frac{1 - \cos(\mathrm{i}z)}{z^3} + e^{1/(z+1)}$$

Classifique todas as singularidades de f e calcule os respectivos resíduos.

b) Calcule

$$\oint_{|z|=2} f(z)\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

[1,0 val.] 4. Considere a da função g definida em $\mathbb{C} \setminus \{z : z^2 - 4 = 0\}$ por

$$g(z) = \frac{z}{z^2 - 4}.$$

Determine o desenvolvimento em série de Laurent da função g, válido para $|z| > 2$, e calcule

$$\oint_{|z|=3} z^4 g(z)\, dz.$$

[1,5 val.] 5. Usando o teorema dos resíduos, calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 13}\, dx\,.$$

Justifique a resposta.

[1,0 val.] 6. Seja C uma curva de Jordan seccionalmente regular, contido em $\mathbb{C} \setminus \{x + \mathrm{i}0 : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ e $P(z)$ um polinómio de grau N. Mostre que

$$\oint_C \frac{P(z)}{(z - a)^{N+2}}\, dz = 0$$

para qualquer real $a \in [0, 1]$.