Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2018/2019

1º Teste, versão A

(CURSOS: LEIC-T, LEGI, LEE, LETI)

3 de Novembro de 2018, 9h30m

Duração: 1h 30m

[3,0 val.] 1. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + y(2 - 3x)$.

a) Determine uma função inteira $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) \qquad \text{e} \qquad f(0) = \mathrm{i}.$$

b) Indique, justificando, o valor do número complexo z_0 tal que

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = -2\pi$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

a) Com $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + y(2 - 3x)$, para que $f = u + \mathrm{i}v$ seja inteira é necessário que sejam satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - y^2 - 2x + y(2 - 3x)\right) = 2x - 2 - 3y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - y^2 - 2x + y(2 - 3x)\right) = 2y - 2 + 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v(x, y) = 2xy - 2y - \frac{3}{2}y^2 + C(x) \\ 2y + C'(x) = 2y - 2 + 3x \end{cases}$$

Da segunda equação conclui-se que $C'(x) = -2 + 3x$ pelo que $C(x) = -2x + \frac{3}{2}x^2 + C$ onde C é uma constante real. Como $f(0) = \mathrm{i}$, tem-se $v(0, 0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$ e portanto

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + y(2 - 3x) + \mathrm{i}(2xy - 2y - \frac{3}{2}y^2 - 2x + \frac{3}{2}x^2 + 1).$$

b) Sendo f inteira, se o número z_0 estiver no exterior da circunferência $C = \{z : |z - 1| = 2\}$, o teorema de Cauchy leva a

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 0.$$

Por outro lado, se z_0 estiver no interior de C a fórmula integral de Cauchy garante que

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi\mathrm{i} f(z_0),$$

logo para

$$f(z_0) = \mathrm{i}$$

pelo pode escolher-se

$$z_0 = 0.$$

[1,0 val.] 2. Seja C uma curva seccionalmente regular que une $-\mathrm{i}$ a $\sqrt[3]{\pi}$. Calcule, justificando, o valor do integral

$$\int_C z^2 \operatorname{sen}(z^3)\, dz.$$

Resolução:

A função integranda é inteira logo, pelo teorema de Cauchy, é primitivável em $\mathbb{C}$. Além disso,

$$z^2 \operatorname{sen}(z^3) = \frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{3}\cos(z^3)\right)$$

logo do teorema fundamental do cálculo temos que o valor do integral é independente do caminho utilizado para unir $-\mathrm{i}$ a $\sqrt[3]{\pi}$. A regra de Barrow garante que

$$\int_C z^2 \operatorname{sen}(z^3)\, dz = -\frac{1}{3}\cos(z^3)\Big|_{z=-\mathrm{i}}^{z=\sqrt[3]{\pi}} = -\frac{1}{3}\left(\cos(\pi) - \cos(\mathrm{i})\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{e+e^{-1}}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \operatorname{ch}(1)\right).$$

[2,5 val.] 3. a) Considere a função definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z+4\mathrm{i})^2} + \frac{\operatorname{sen}(\mathrm{i}z)}{z^2} + e^{1/(z-1)}$$

Classifique todas as singularidades de f e calcule os respectivos resíduos.

b) Calcule

$$\oint_{|z|=3} f(z)\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido horário.

Resolução:

a) As singularidades de f são em $z=0$, $z=1$ e $z=-4\mathrm{i}$. Em conta que os limites

$$\lim_{z\to 0} z\, f(z) \;=\; \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen}(iz)}{z} = \mathrm{i}$$

e

$$\lim_{z\to -4\mathrm{i}} (z+4\mathrm{i})^2\, f(z) \;=\; 1 + \lim_{z\to -4\mathrm{i}} (z+4\mathrm{i})^2 \left(\frac{\operatorname{sen}(\mathrm{i}z)}{z^2} + e^{1/(z-1)}\right) = 1$$

são finitos e não nulos conclui-se que $z=0$ é um pólo simples e $z=-4\mathrm{i}$ um pólo de ordem 2 da função f. Os respectivo resíduos são

$$\operatorname{Res}(f, z=0) = \mathrm{i}$$

e

$$\operatorname{Res}(f, -4\mathrm{i}) = \lim_{z\to -4\mathrm{i}} \frac{d}{dz}\Big((z+4\mathrm{i})^2 f(z)\Big) = 0.$$

A natureza da singularidade de f em $z=1$, depende apenas da parcela $e^{1/(z-1)}$. A expansão em série de Laurent

$$e^{1/(z-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{(z-1)^n} = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2} + \cdots$$

garante que f tem uma singularidade essencial em $z=1$ com $\operatorname{Res}(f, z=1) = 1$.

b) Dado que f é holomorfa para qualquer $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -4\mathrm{i}\}$ e a curva $\{z : |z| = 3\}$ não contém qualquer das singularidades de f então, resulta do teorema dos resíduos

$$\oint_{|z|=3} f(z)\, dz = -2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname{Res}(f, z=0) + \operatorname{Res}(f, z=1)\right) = 2\pi(1-\mathrm{i}).$$

[1,0 val.] 4. Considere a da função g definida em $\mathbb{C} \setminus \{z : z^2 + 9 = 0\}$ por

$$g(z) = \frac{2z}{z^2+9}.$$

Determine o desenvolvimento em série de Laurent da função g, válido para $|z| > 3$, e calcule

$$\oint_{|z|=4} z^2 g(z)\, dz.$$

O desenvolvimento em série de Laurent de g, em potências de z, é dado por

$$\begin{aligned} g(z) = \frac{2z}{z^2+9} &= \frac{2z}{z^2}\,\frac{1}{1-(-9/z^2)} = \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-9)^n\,\frac{1}{z^{2n}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(-9)^n\,\frac{1}{z^{2n+1}} = 2\frac{1}{z} - 18\frac{1}{z^3} + 162\frac{1}{z^5} - \cdots \end{aligned}$$

válido para $|z| > 3$.

Para o cálculo do integral, e dado que a curva de integração está contida na região de validade da série de Laurent, o respectivo valor obtém-se do coeficiente adequado no desenvolvimento

$$z^2\, g(z) = 2z - 18\frac{1}{z} + 162\frac{1}{z^3} - \cdots .$$

Assim

$$\oint_{|z|=4} z^2 g(z)\, dz = (-18)2\pi\mathrm{i} = -36\pi\mathrm{i}.$$

[1,5 val.] 5. Usando o teorema dos resíduos, calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-6x+13}\, dx\,.$$

Justifique a resposta.

Resolução: Para cada $R > 0$ considere o caminho $\gamma_R(t) = Re^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \pi]$, e o caminho de Jordan positivamente orientado $\Gamma_R = [-R, R] + \gamma_R$. Além disso

$$f(z) = \frac{1}{z^2-6z+13}$$

é uma função holomorfa no plano complexo exceptuando as singularidades isoladas $3 - 2\mathrm{i}$, $3 + 2\mathrm{i}$. Para $R > 4$,

$$3 - 2\mathrm{i} \in \operatorname{ext}\Gamma_R\,, \quad 3 + 2\mathrm{i} \in \operatorname{int}\Gamma_R\,.$$

Por outro lado, por factorização polinomial,

$$f(z) = \frac{1}{(z-3+2\mathrm{i})(z-3-2\mathrm{i})} = \frac{1}{(z-3)^2+4},$$

e, portanto,

$$\lim_{z\to 3+2\mathrm{i}} (z-3-2\mathrm{i}) f(z) = \frac{1}{4\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{4} \neq 0\,.$$

Concluimos assim que $f(z)$ tem um pólo simples em $3 + 2i$ e que, portanto, o respectivo resíduo é dado por

$$\operatorname{Res}(f, z = 3 + 2\mathrm{i}) = -\frac{\mathrm{i}}{4}\,.$$

Usando o teorema dos resíduos obtemos

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f, z = 3 + 2\mathrm{i}) = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{-\mathrm{i}}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Da igualdade

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz\,,$$

passada ao limite, quando $R \to +\infty$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-6x+13}\,dx = \frac{\pi}{2} - \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz.$$

Mostramos agora que o limite acima é zero:

Como $z \in \gamma_R \;\Rightarrow\; |z| = R$, e como para o comprimento do caminho γ_R se tem $L_{\gamma_R} = \pi R$, usando a fórmula de majoração do integral complexo, obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z-3)^2+4}\,dz\right| &\leqslant L_{\gamma_R} \max_{z\in\gamma_R}\left|\frac{1}{(z-3)^2+4}\right| \leqslant \pi R \max_{z\in\gamma_R}\frac{1}{(|z|-3)^2-4}\\ &= \frac{\pi R}{(R-3)^2-4}\,.\end{aligned}$$

pelo facto de $\frac{\pi R}{(R-3)^2-4} \to 0$, quando $R \to +\infty$, provamos que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0\,.$$

Finalmente concluimos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-6x+13}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

[1,0 val.] 6. Seja C uma curva de Jordan seccionalmente regular, contida em $\mathbb{C}\setminus\{x+\mathrm{i}0 : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ e $P(z)$ um polinómio de grau N. Mostre que

$$\oint_C \frac{P(z)}{(z-a)^{N+2}}\,dz = 0$$

para qualquer real $a \in [0,1]$.

Resolução:

O conjunto $\{x+\mathrm{i}0 : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ é o intervalo dos números reais $[0,1]$. Existem duas possibilidades:

$$(A)\quad [0,1] \subset \operatorname{ext} C\,, \qquad \text{(B)}\quad [0,1] \subset \operatorname{int} C\,.$$

No caso (A):

Para cada $a \in [0,1]$ a função

$$z \mapsto \frac{P(z)}{(z-a)^{N+2}}$$

é analítica num disco aberto que contém o interior da curva C pelo que o teorema de Cauchy garante que

$$\oint_C \frac{P(z)}{(z-a)^{N+2}}\,dz = 0\,.$$

No caso (B):

Para cada $a \in [0,1]$ a função

$$z \mapsto \frac{P(z)}{(z-a)^{N+2}}$$

é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ onde $a \in \operatorname{int} C$ resultando do teorema de Cauchy que

$$\oint_C \frac{P(z)}{(z-a)^{N+2}}\,dz = \oint_{|z-a|=1} \frac{P(z)}{(z-a)^{N+2}}\,dz$$

e das fórmulas integrais de Cauchy

$$\oint_C \frac{P(z)}{(z-a)^{N+2}}\,dz = \pm\frac{2\pi\mathrm{i}}{(N+1)!}\frac{d^{N+1}\,P(a)}{dz^{N+1}}\,.$$

Em conta de P ser um polinómio de grau N temos

$$\frac{d^{N+1}\,P(a)}{dz^{N+1}} = 0, \qquad \forall a \in \mathbb{C}$$

donde se conclui

$$\oint_C \frac{P(z)}{(z-a)^{N+2}}\,dz = 0\,.$$