TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2018/2019

1º Teste, versão A

(CURSOS: LEIC-T, LEGI, LEE, LETI)

3 de Novembro de 2018, 9h30m

Duração: 1h 30m

[3,0 val.] 1. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + y(2 - 3x)$.

a) Determine uma função inteira $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) \qquad \text{e} \qquad f(0) = \mathrm{i}.$$

b) Indique, justificando, o valor do número complexo z_0 tal que

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = -2\pi$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

[1,0 val.] 2. Seja C uma curva seccionalmente regular que une $-\mathrm{i}$ a $\sqrt[3]{\pi}$. Calcule, justificando, o valor do integral

$$\int_C z^2 \operatorname{sen}(z^3)\, dz.$$

[2,5 val.] 3. a) Considere a função definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z + 4\mathrm{i})^2} + \frac{\operatorname{sen}(\mathrm{i}z)}{z^2} + e^{1/(z-1)}$$

Classifique todas as singularidades de f e calcule os respectivos resíduos.

b) Calcule

$$\oint_{|z|=3} f(z)\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido horário.

[1,0 val.] 4. Considere a da função g definida em $\mathbb{C} \setminus \{z : z^2 + 9 = 0\}$ por

$$g(z) = \frac{2z}{z^2 + 9}.$$

Determine o desenvolvimento em série de Laurent da função g, válido para $|z| > 3$, e calcule

$$\oint_{|z|=4} z^2 g(z)\, dz.$$

[1,5 val.] 5. Usando o teorema dos resíduos, calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 13}\, dx\,.$$

Justifique a resposta.

[1,0 val.] 6. Seja C uma curva de Jordan seccionalmente regular, contida em $\mathbb{C} \setminus \{x + \mathrm{i}0 : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ e $P(z)$ um polinómio de grau N. Mostre que

$$\oint_C \frac{P(z)}{(z - a)^{N+2}}\, dz = 0$$

para qualquer real $a \in [0, 1]$.