

Análise Complexa e Equações Diferenciais  
Apontamentos das aulas teóricas

1º Semestre 2017/2018

## ÍNDICE

Introdução	3
1. Revisões sobre números complexos	3
2. Representação trigonométrica dos números complexos	4
3. Noções topológicas em $\mathbb{C}$ .	6
4. Funções complexas de variável complexa	8
5. Limite e continuidade de funções complexas	10
6. Derivada complexa	13
7. Derivada do logaritmo	16
8. Funções harmónicas	20
9. Caminhos e curvas no plano complexo	23
10. Integral de caminho de uma função complexa	24
11. Teorema Fundamental do Cálculo	29
12. Teorema de Cauchy	32
13. Fórmulas integrais de Cauchy	36
14. Aplicações das fórmulas integrais de Cauchy	39
15. Séries numéricas	41
16. Séries de potências	44
17. Séries de Taylor	46
18. Séries de Laurent e classificação de singularidades isoladas	51
19. Teorema dos Resíduos	55
20. Aplicações do Teorema dos Resíduos	61
21. Introdução às equações diferenciais	65
22. Equações lineares e separáveis. Mudança de variável	69
23. Equações exactas e redutíveis a exactas	72
24. Campos de direcções e o método de Euler	75
25. Existência e unicidade de soluções de EDOs	78
26. Prolongamento de soluções a intervalos máximos	84
27. Comparação de soluções de equações diferenciais	86
28. Sistemas de equações lineares	91
29. Sistemas lineares homogéneos	92
30. Redução de ordem	101
31. Equações lineares de ordem superior	104
32. Método dos aniquiladores	109
33. Exponencial matricial	112
34. Fórmula de variação das constantes	118
35. Método de separação das variáveis	124
36. Séries de Fourier	128
37. Mais exemplos do método de separação das variáveis	135
Apêndice A. Forma canónica de Jordan e sistemas não diagonalizáveis	140
Referências	149

## INTRODUÇÃO

Este texto consiste numa transcrição razoavelmente fiel das apresentações feitas nas aulas teóricas. Não se destina a substituir um livro de texto. Para um tratamento coerente dos assuntos desta cadeira recomendamos [B] e [BV] ou [G].

Cada secção corresponde aproximadamente a uma aula teórica.

### 1. REVISÕES SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS

Um número complexo é um par de números reais  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Habitualmente escrever-se  $a + bi$  em vez de  $(a, b)$ . O conjunto dos números complexos  $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$  é dotado de duas operações, soma e produto, definidas pelas expressões

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi) \cdot (c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Estas expressões resultam formalmente da adição aos números reais de um novo número  $i$ , cujo quadrado é o número real  $-1$ . Não é difícil verificar que estas operações satisfazem as propriedades habituais da soma e produto dos números reais (comutatividade, associatividade, existência de elemento neutro, etc...) que se costumam abreviar dizendo que  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  é um corpo. Consequentemente, todas as manipulações algébricas elementares permitidas com números reais permanecem válidas quando lidamos com números complexos.

Geometricamente, um número complexo pode ser visto como um ponto do plano, ou um vector do plano com ponto inicial a origem. A soma de números complexos corresponde precisamente à adição de vectores.

Quando tomamos este ponto de vista geométrico, os números complexos formam um plano – o plano complexo, e os eixos dos  $xx$  e dos  $yy$  são designados, respectivamente, por eixo real e eixo imaginário. As funções coordenadas usuais designam-se por parte real  $\text{Re}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  e parte imaginária  $\text{Im}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo definidas por

$$\text{Re}(a + bi) = a \quad \text{Im}(a + bi) = b.$$

Note-se que a parte imaginária de um número complexo é, por definição, *um número real*.

**1.1. Módulo e conjugado.** O conjugado  $\bar{z}$  de um número complexo  $z \in \mathbb{C}$  é definido pela expressão

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

O módulo  $|z|$  de um número complexo  $z \in \mathbb{C}$  é o número real não negativo definido por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Geometricamente, o conjugado de um complexo é a sua reflexão no eixo real e o módulo é a distância à origem.

**Proposição 1.2** (Propriedades do módulo e conjugado). *Dados  $z, w \in \mathbb{C}$  tem-se*

- (i)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- (ii)  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- (iii)  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$  (e portanto  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  para  $z \neq 0$ )

- (iv)  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$   
 (v)  $|z + w| \leq |z| + |w|$   
 (vi)  $|z + w| \geq ||z| - |w||$

*Dem.*

- (i)  $\frac{(a + bi) + (c + di)}{a + bi + c + di} = \frac{(a + c) + (b + d)i}{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) =$   
 $\frac{(a + bi) \cdot (c + di)}{a + bi \cdot c + di}$   
 (ii)  $\frac{(a + bi) \cdot (c + di)}{a + bi \cdot c + di} = \frac{(ac - bd) + (ad + bc)i}{a + bi \cdot c + di} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi) \cdot (c - di) =$   
 (iii) Uma vez que  $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$  tem-se  $(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) =$   
 $a^2 + b^2 = |a + bi|^2$ . Quando  $z \neq 0$ , dividindo por  $|z|^2$  obtém-se a igualdade

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

- (iv) Fica como exercício obter este resultado a partir da definição do produto. Iremos demonstrá-lo mais abaixo usando a representação trigonométrica.  
 (v) Trata-se da habitual desigualdade triangular para a soma de vectores.  
 (vi) Esta fórmula obtém-se geometricamente notando que o comprimento do vector  $z + w$  é mínimo precisamente quando  $z$  e  $w$  têm sentidos opostos, e nesse caso o comprimento de  $|z + w|$  é o valor absoluto de  $|z| - |w|$ . Alternativamente deduz-se da desigualdade triangular (v) aplicando-a aos vectores  $(z + w)$  e  $-w$ :

$$|z| = |(z + w) + (-w)| \leq |z + w| + |w| \Leftrightarrow |z| - |w| \leq |z + w|$$

Trocando  $z, w$  obtém-se a desigualdade  $|w| - |z| \leq |z + w|$  e estas duas, em conjunto, são equivalentes à desigualdade pretendida. □

**Exemplo 1.3.**  $\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$ .

## 2. REPRESENTAÇÃO TRIGONOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

**2.1. Representação trigonométrica dos complexos.** Um número complexo é um ponto do plano e portanto pode ser descrito nas coordenadas polares estudadas em Cálculo 2. Podemos escrever

$$(1) \quad a + bi = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

onde  $r \geq 0$  é a distância à origem do ponto  $(a, b)$  (isto é, o módulo  $|a + bi|$ ) e  $\theta$  é o ângulo com o eixo real medido no sentido directo (que está apenas determinado a menos de um múltiplo inteiro de  $2\pi$ ). Escrevemos

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

por razões que se tornarão claras mais tarde, e portanto um número complexo na forma trigonométrica escreve-se  $re^{i\theta}$  com  $r \in \mathbb{R}_0^+$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Chamamos *conjunto dos argumentos* de um número complexo  $a + bi$ , denotado por  $\text{Arg}(a + bi)$ , ao conjunto de todos os  $\theta \in \mathbb{R}$  que satisfazem (1). Por vezes é útil escolher

um argumento específico. Chamamos *argumento principal* de um número complexo  $z \neq 0$  ao único elemento de  $\text{Arg}(z)$  que pertence ao intervalo  $] -\pi, \pi]$ .

**Exemplo 2.2.**

- (i)  $e^{i\pi} = -1$ . Esta fórmula chama-se a fórmula de Euler. Relaciona quatro das constantes matemáticas mais importantes:  $e, \pi, i, 1$ .
- (ii) Escrever  $3+3i$  em forma trigonométrica:  $|3+3i| = 3\sqrt{2}$  e  $\text{Arg}(3+3i) = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$  logo  $3+3i = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ . O argumento principal de  $3+3i$  é  $\frac{\pi}{4}$ .
- (iii) Escrever  $5e^{i\frac{\pi}{6}}$  na forma  $a+bi$ :  $5e^{i\frac{\pi}{6}} = 5(\cos \frac{i\pi}{6} + i \sin \frac{i\pi}{6}) = 5(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5i}{2}$ .

**2.3. Produto de complexos na forma trigonométrica.** Dados dois números complexos  $re^{i\alpha}$  e  $se^{i\beta}$  na forma trigonométrica, o seu produto é

$$\begin{aligned} re^{i\alpha} \cdot se^{i\beta} &= r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot s(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= rs((\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)) \\ &= rs(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

onde na última passagem usamos as fórmulas trigonométricas para a adição dos ângulos. Conclui-se que efectuar o produto na forma trigonométrica consiste em *multiplicar os módulos* (conforme a Proposição 1.2(iv)) e *somar os argumentos*.

As potências de expoente inteiro são fáceis de calcular na forma trigonométrica. Por indução obtém-se a fórmula

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}.$$

**Exemplo 2.4.** Calcular  $(1+i)^{10}$ : Tem-se  $(1+i) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ , donde

$$(1+i)^{10} = (\sqrt{2})^{10} e^{\frac{10\pi i}{4}} = 2^5 e^{\frac{\pi i}{2}} = 32i.$$

**2.5. Raízes complexas.** Sendo  $n$  um natural, o conjunto das raízes de índice  $n$  de um número complexo  $z$  é o conjunto

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}$$

As raízes de um número complexo podem ser facilmente calculadas expressando o complexo em questão na forma trigonométrica.

**Exemplo 2.6.** Calcular  $\sqrt[3]{-1}$ : Temos que resolver a equação  $z^3 = -1$ . Escrevendo  $z = re^{i\theta}$  e  $-1 = e^{\pi i}$  temos

$$z^3 = -1 \Leftrightarrow r^3 e^{3i\theta} = e^{\pi i} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{(2k+1)\pi}{3} \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Portanto as soluções são os números complexos  $z = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{3}}$  para  $k \in \mathbb{Z}$ . Estes números dependem apenas do resto da divisão de  $k$  por 3 portanto conclui-se que

$$\sqrt[3]{-1} = \left\{ e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{3\pi i}{3}}, e^{\frac{5\pi i}{3}} \right\} = \left\{ e^{\frac{\pi i}{3}}, -1, e^{-\frac{\pi i}{3}} \right\}.$$

Em geral, seguindo o procedimento do exemplo anterior obtém-se a seguinte expressão para raiz de índice  $n$  de um complexo não nulo:

$$\sqrt[n]{Re^{i\phi}} = \left\{ \sqrt[n]{R} e^{i\frac{\phi+2k\pi}{n}} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Uma vez que o valor de  $e^{i\frac{\phi+2k\pi}{n}}$  depende apenas do resto da divisão de  $k$  por  $n$ , o conjunto  $\sqrt[n]{Re^{i\phi}}$  é formado por exactamente  $n$  complexos distintos

$$\sqrt[n]{Re^{i\phi}} = \left\{ \sqrt[n]{R} e^{i\frac{\phi+2k\pi}{n}} : k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

que formam os vértices de um polígono regular de  $n$  lados, inscrito numa circunferência de raio  $\sqrt[n]{R}$  centrada na origem.

### 3. NOÇÕES TOPOLÓGICAS EM $\mathbb{C}$ .

**3.1. Conjuntos abertos.** Os conceitos topológicos (noções como conjunto aberto, fechado, fronteira, limite de sucessão, etc.) são importados de Cálculo 2 através da identificação entre  $\mathbb{C}$  e o plano  $\mathbb{R}^2$ . Vou apenas recordar rapidamente os conceitos que vão ser mais utilizados durante o nosso estudo das funções complexas.

**Definição 3.2.** A bola aberta de raio  $R > 0$  centrada em  $z_0 \in \mathbb{C}$  é o conjunto

$$B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}.$$

Um conjunto  $A \subset \mathbb{C}$  diz-se aberto se para todo o  $z \in A$  existe um  $R > 0$  tal que  $B_R(z) \subset A$ .

Intuitivamente um conjunto é aberto se contém todos os pontos que estejam "suficientemente perto" de cada um dos seus pontos. Dado um conjunto  $A \subset \mathbb{C}$  definimos o seu *interior*,  $\text{int } A$ , como a união de todos os conjuntos abertos contidos em  $A$ ; o seu *exterior*,  $\text{ext } A$ , como o interior do seu complementar; a sua *fronteira*,  $\partial A$ , como o complementar de  $\text{int } A \cup \text{ext } A$ ; e o seu *fecho*,  $\bar{A}$ , como  $\text{int } A \cup \partial A = A \cup \partial A$ .

**Exemplo 3.3.**

- (i) O conjunto  $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\}$  (trata-se do semiplano aberto formado pelos primeiro e quarto quadrante) é aberto. Para cada  $z = a + bi \in A$ , a bola de raio  $a$  centrada em  $z$  está contida em  $A$ .
- (ii) O conjunto  $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  (trata-se do círculo de raio 1 centrado na origem) não é aberto. De facto, os pontos de  $A$  que satisfazem  $|z| = 1$  não satisfazem a condição na definição de conjunto aberto. O complementar de  $A$  é aberto: dado  $z \in \mathbb{C}$  com  $|z| > 1$ , a bola aberta centrada em  $z$  que tem por raio a distância de  $z$  à circunferência de raio 1 está inteiramente contida no complementar de  $A$ . Recordar-se que um conjunto cujo complementar é aberto se diz fechado (porque coincide com o seu fecho).
- (iii) O conjunto  $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < \text{Re}(z) \leq 2\}$  não é aberto e também não é fechado (isto é, o seu complementar também não é aberto).

### 3.4. Limites de sucessões.

**Definição 3.5.** Uma sucessão  $z_n$  de números complexos converge para  $w \in \mathbb{C}$  se a sucessão real  $|z_n - w|$  tende para 0.

Escrevendo  $z_n = x_n + iy_n$  com  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$  e  $w = a + bi$ , a noção de convergência que acabámos de definir é equivalente à convergência da sucessão  $(x_n, y_n)$  em  $\mathbb{R}^2$  para o vector  $(a, b)$ . Por sua vez, como aprenderam em Cálculo 2, esta última noção equivale à convergência das sucessões reais  $x_n$  e  $y_n$  para  $a$  e  $b$  respectivamente.

#### Exemplo 3.6.

- (i) A sucessão  $i^n$  não converge. De facto, a sucessão das partes reais é a sucessão  $0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \dots$  que claramente não converge em  $\mathbb{R}$ .
- (ii) A sucessão  $z_n = \frac{1}{3+ni}$  converge para 0. De facto

$$\frac{1}{3+ni} = \frac{3-ni}{9+n^2} = \frac{3}{9+n^2} - \frac{n}{9+n^2}i$$

e claramente as sucessões formadas tomando a parte real e a parte imaginária convergem para 0. Alternativamente podemos observar directamente que  $|z_n| = \frac{1}{\sqrt{9+n^2}}$  converge para 0.

**3.7. Funções complexas de variável complexa.** O objecto principal de estudo da primeira parte desta cadeira são as funções complexas de uma variável complexa. Trata-se de funções da forma

$$f: A \rightarrow \mathbb{C}$$

onde  $A \subset \mathbb{C}$  é um subconjunto de  $\mathbb{C}$ . Podemos escrever  $f$  na forma

$$f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

As funções  $u, v: A \rightarrow \mathbb{R}$  designam-se por *parte real* e *parte imaginária* de  $f$ . Mediante a identificação de  $\mathbb{C}$  com  $\mathbb{R}^2$ , uma função complexa de variável complexa é simplesmente uma função do subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  para  $\mathbb{R}^2$ . Estas funções foram já objecto de estudo em Cálculo 2. As noções de limite e continuidade de funções complexas são as já estudadas em Cálculo 2, como iremos detalhar mais adiante.

Ao contrário do que acontece com as funções reais de uma variável real, não é fácil visualizar uma função complexa através do seu gráfico (que é agora uma superfície no espaço euclidiano de dimensão 4). No entanto, uma função complexa pode ser visualizada como uma *transformação do plano*, isto é, como uma regra que move os pontos do plano.

**Exemplo 3.8.** Seja  $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  a função complexa definida pela expressão  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Então

$$f(x+iy) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \left( -\frac{y}{x^2+y^2} \right).$$

A parte real de  $f$  é portanto  $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$  e a parte imaginária  $v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$ .

É fácil entender o efeito de  $f$  enquanto transformação do plano usando a representação trigonométrica:

$$\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

Assim,  $f$  envia cada semirecta apoiada na origem na semirecta que se obtém reflectindo no eixo real. A intersecção de uma semi-recta com o interior da circunferência de raio 1 é enviada no exterior da circunferência de raio 1.

#### 4. FUNÇÕES COMPLEXAS DE VARIÁVEL COMPLEXA

Vamos ver alguns exemplos importantes de funções complexas.

##### Exemplo 4.1.

(i) **Funções polinomiais.** Trata-se de funções  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definidas por expressões do tipo

$$f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, \quad \text{com } a_i \in \mathbb{C}$$

Um exemplo concreto é por exemplo  $f(z) = (2+i)z^2 - 3z + (2+i)$ .

(ii) **Funções racionais.** Trata-se de funções definidas pelo quociente de duas funções polinomiais. Isto é  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  é definida por

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{com } p(z), q(z) \text{ polinómios.}$$

com  $A = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}: q(z) = 0\}$  o conjunto dos pontos onde o denominador  $q(z)$  não se anula. Um exemplo concreto é a função  $z \mapsto \frac{z-i}{z^2+iz}$  definida em  $\mathbb{C} \setminus \{0, -i\}$ .

(iii) **A exponencial complexa.** Trata-se da função mais importante da Análise Complexa. É a função  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida pela expressão

$$x + iy \mapsto e^{x+iy} \stackrel{\text{def}}{=} e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

Note-se que, na forma trigonométrica o complexo  $e^{x+iy}$  se escreve  $re^{i\theta} = e^x e^{iy}$ , o que permite entender facilmente a exponencial complexa enquanto transformação do plano: rectas horizontais de ordenada  $y$  são enviadas em semi-rectas a partir da origem fazendo o ângulo  $y$  com o eixo real. A semi-recta à esquerda do eixo imaginário é enviada para o interior da circunferência de raio 1 e a semi-recta à direita do eixo imaginário, para o exterior da circunferência. A imagem da função  $z \mapsto e^z$  é  $\mathbb{C} \setminus 0$  e  $e^{z+2k\pi i} = e^z$ , isto é a função exponencial complexa é periódica com período  $2\pi i$ .

(iv) **Logaritmos e potências de expoente complexo** Para  $w \neq 0$ , define-se o conjunto dos logaritmos de  $w$  por

$$\text{Log}(w) = \{z \in \mathbb{C}: e^z = w\}.$$

O conjunto dos logaritmos é determinado resolvendo a equação anterior usando a forma trigonométrica para  $w$ . Por exemplo para achar  $\text{Log}(-1)$  temos de resolver a equação

$$e^{x+iy} = -1 \Leftrightarrow e^x e^{iy} = 1 \cdot e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ e^{iy} = e^{i\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pi + 2k\pi \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



logo

$$\text{Log}(-1) = \{(2k + 1)\pi i : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Note-se que a correspondência  $z \mapsto \text{Log}(z)$  não é uma função pois (para  $z \neq 0$ )  $\text{Log}(z)$  é um conjunto infinito de números complexos.

A determinação do logaritmo de um número complexo não nulo qualquer faz-se exactamente como no exemplo acima. Para achar  $\text{Log}(re^{i\theta})$  com  $r \neq 0$ , resolve-se

$$e^x e^{iy} = re^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log r \\ y = \theta + 2k\pi \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(onde  $\log$  denota a função logaritmo real habitual). Uma vez que para  $z = re^{i\theta}$ , temos  $r = |z|$  e  $\{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \text{Arg}(z)$ , obtemos a seguinte fórmula para o logaritmo

$$\text{Log}(z) = \log |z| + i \text{Arg}(z)$$

que deve ser entendida como uma igualdade de conjuntos.

Usando os logaritmos definem-se as potências de expoente complexo  $w$  para qualquer número complexo  $z \neq 0$  pela forma habitual

$$z^w \stackrel{\text{def}}{=} e^{w \text{Log } z}$$

onde o lado direito da igualdade significa o conjunto de todos os números complexos que se obtêm substituindo na expressão do lado direito um dos logaritmos de  $z$ .

Por exemplo, o conjunto  $2^i$  é por definição o conjunto

$$2^i = e^{i \text{Log}(2)} = \{e^{i(\log(2) + i2k\pi)} : k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{-2k\pi + i \log 2} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

(v) **Funções trigonométricas.** As funções trigonométricas complexas são definidas pelas seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} \text{sen } z &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} & \text{cos } z &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \text{senh } z &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2} & \text{cosh } z &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \end{aligned}$$

Se  $z \in \mathbb{R}$  estas fórmulas produzem o resultado já conhecido de Cálculo 1. Isto é evidente no caso do seno e coseno hiperbólico. Verifiquemos que isto é verdade no caso do seno:

$$\text{sen}(x + 0i) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{(\cos x + i \text{sen } x) - (\cos x - i \text{sen } x)}{2i} = \frac{2i \text{sen } x}{2i} = \text{sen } x.$$

As restantes funções trigonométricas são definidas a partir destas pelas fórmulas habituais. Por exemplo  $\tan z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{sen } z}{\text{cos } z}$ .

**Exemplo 4.2.** Resolução da equação  $\text{sen } z = 2$ : Temos

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 4i.$$

Escrevendo  $w = e^{iz}$ , a equação anterior é equivalente a

$$w - \frac{1}{w} = 4i \Leftrightarrow w^2 - 4iw - 1 = 0 \quad (\text{para } w \neq 0)$$

As soluções da equação quadrática são

$$w = \frac{4i \pm \sqrt{-16 + 42}}{2} = (2 \pm \sqrt{3})i$$

e portanto temos

$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i \Leftrightarrow iz = \log(2 \pm \sqrt{3}) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i, k \in \mathbb{Z}$$

ou seja

$$z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i \log(2 \pm \sqrt{3}), \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

## 5. LIMITE E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES COMPLEXAS

**5.1. Continuidade e limite.** Conforme já mencionámos não há nada de novo nas noções de continuidade e limite de funções complexas. Uma função complexa é o mesmo que uma função de  $\mathbb{R}^2$  para  $\mathbb{R}^2$  e as noções de continuidade e limite para as funções complexas são as que foram estudadas em Cálculo 2.

**Definição 5.2.** *Seja  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  e  $z_0 \in \bar{A}$  um ponto do fecho de  $A$ . Escrevendo  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z_0 = a + bi$  e  $w = c + di$ , dizemos que*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$$

se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (u(x, y), v(x, y)) = (c, d).$$

A definição anterior admite várias formulações equivalentes, como aprenderam em Cálculo 2. Recordamos as seguintes:

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} u(x, y) = c$  e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} v(x, y) = d$ .
- $\lim f(z_n) = w$  para toda a sucessão  $z_n$  de termos em  $A$  convergindo para  $z_0$ .
- $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - w| = 0$ .

A última das formulações anteriores é a mais prática quando há que provar a existência de limite. O que é necessário fazer é arranjar um candidato  $w$  e mostrar que a distância de  $f(z)$  a  $w$  é pequena desde que  $z$  esteja próximo de  $z_0$ .

A definição de continuidade é também a de sempre:

**Definição 5.3.** *Seja  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  e  $z_0 \in A$ . A função  $f$  diz-se contínua em  $z_0$  se*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Considerando a primeira das formulações equivalentes a seguir à definição de limite, e escrevendo  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , a continuidade de  $f$  num ponto equivale à continuidade das funções reais  $u$  e  $v$  no mesmo ponto.

Note-se que todas as propriedades do limite e continuidade a que estamos habituados se mantêm. Por exemplo, o limite de um produto de funções é o produto dos limites, a composição de funções contínuas é contínua, etc...

**Exemplo 5.4.**

- (i) *As funções polinomiais são contínuas. Uma das maneiras de justificar esta afirmação é dizer que as partes reais e imaginárias são polinómios em  $(x, y)$  e portanto funções contínuas.*
- (ii) *As funções racionais são contínuas no seu domínio (pois são quocientes de funções contínuas).*
- (iii) *A exponencial complexa  $(x + iy) \mapsto e^x \cos y + ie^x \sin y$  é contínua uma vez que as partes real e imaginária são contínuas.*
- (iv) *As funções trigonométricas complexas são contínuas no seu domínio (pois são definidas a partir da exponencial por operações algébricas elementares).*

Uma diferença importante entre a análise complexa e a real diz respeito ao comportamento de logaritmos e potências de expoente não inteiro. Como vimos, o logaritmo não é agora uma função. É possível escolher uma função logaritmo, mas *não de forma a que seja contínua* como iremos ver adiante. Analogamente para as potências.

Recorda-se finalmente, que a definição de continuidade, e as propriedades das funções contínuas são um dos principais métodos utilizados no cálculo de limites.

**Exemplo 5.5.** *Calcular  $\lim_{z \rightarrow 1+i} \operatorname{sen}(z^2 + 3i)$ .*

*Uma vez que a função da qual estamos a calcular o limite é contínua temos*

$$\lim_{z \rightarrow 2+i} \operatorname{sen}(z^2 + i) = \operatorname{sen}((2 + i)^2 + i) = \operatorname{sen}(3 + 5i).$$

**Exemplo 5.6.** *Estudar a continuidade das seguintes funções.*

$$(a) f(z) = \begin{cases} e^{1/z} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

*A função é contínua para  $z \neq 0$  uma vez que é a composta de funções contínuas. Em  $z = 0$  não é contínua porque os limites direccionais em 0 não existem ou não são finitos. Por exemplo,*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x+0i}} = +\infty.$$

$$(b) f(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

*A função é contínua em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  uma vez que é o quociente de funções contínuas. Em  $z = 0$  não é contínua porque para  $z \neq 0$ , temos  $|f(z)| = \frac{|z|}{|z|} = 1$  e portanto  $|f(z)|$  não tende para 0 quando  $z$  tende para 0.*

**Exemplo 5.7. É impossível escolher uma função logaritmo contínua.** *Recorde-se que os logaritmos de um complexo  $z \neq 0$  são dados pela fórmula*

$$\text{Log } z = \log |z| + i \text{Arg}(z)$$

onde  $\log$  designa a função real habitual e  $\text{Arg}$  o conjunto dos argumentos. Podemos escolher uma função logaritmo escolhendo um valor (entre os infinitos possíveis) para o argumento de cada número complexo. Consideremos por exemplo a função definida pela escolha do argumento principal:

$$z \mapsto f(z) = \log |z| + i \arg(z) \quad \text{com } \arg(z) \in ]-\pi, \pi]$$

A imagem desta função é então a faixa horizontal do plano complexo  $\{x+iy: -\pi < y \leq \pi\}$ . Cada circunferência no plano complexo de raio  $r > 0$  é enviada no segmento de recta vertical semi-aberto com abcissa  $\log r$ . A parte real da função é contínua mas a parte imaginária (e portanto a própria função logaritmo) é descontínua no semi-eixo real negativo (onde o argumento "salta" de  $-\pi$  para  $\pi$ ). Por exemplo temos

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} f(-1 + yi) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \log(|-1 + yi|) + i \arg(-1 + yi) = 0 - \pi i \neq f(-1) = \pi i.$$

O domínio de continuidade da função logaritmo determinada pela escolha do argumento principal é portanto  $\mathbb{C} \setminus \{x + 0i: x \leq 0\}$ .

Intuitivamente é claro que é impossível escolher de forma contínua um argumento para cada número em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , e isso pode de facto demonstrar-se (é resultado de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ter "um buraco", isto é, de não ser simplesmente conexo). Consequentemente é impossível escolher uma função logaritmo que seja contínua no domínio  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Exemplo 5.8. É impossível escolher uma função potência de expoente complexo (não inteiro) de forma contínua.** *Vamos considerar o exemplo da raiz cúbica mas exactamente o mesmo sucede para qualquer tentativa de definir uma função da forma  $z \mapsto z^\alpha$  quando  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ .*

Dado  $z = re^{i\theta} \neq 0$ , o conjunto das raízes cúbicas de  $z$  é

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{re^{i\theta}} = \{\sqrt[3]{re^{i\theta + 2k\pi}} : k \in \mathbb{Z}\} = \sqrt[3]{|z|} e^{i\frac{\text{Arg}(z)}{3}}.$$

Podemos escolher uma função raiz cúbica escolhendo um valor para o argumento de cada número complexo. Tomemos por exemplo o argumento no intervalo  $[0, 2\pi[$ . Obtemos então a função  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$f(z) = \begin{cases} \sqrt[3]{|z|} e^{i\frac{\arg(z)}{3}} & \text{se } z \neq 0 \quad (\text{com } \arg(z) \in [0, 2\pi[) \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

A imagem desta função é o conjunto de todos os números complexos com argumentos no intervalo  $[0, \frac{2\pi}{3}[$  juntamente com a origem. A função  $f$  é descontínua no semi-eixo real positivo (onde a escolha de argumento "salta" de 0 para  $2\pi$ ). Fica como exercício verificar a continuidade da função  $f(z)$  em 0.

O domínio de continuidade de  $f$  é portanto  $\mathbb{C} \setminus \{x + 0i: x > 0\}$ .

## 6. DERIVADA COMPLEXA

**Definição 6.1.** *Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função. A função  $f$  diz-se diferenciável (no sentido complexo) em  $z_0 \in U$  se existe o limite*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Nesse caso, o limite chama-se a derivada (complexa) de  $f$  em  $z_0$ , que se denota por  $f'(z_0)$  ou  $\frac{df}{dz}(z_0)$ .

Se  $f$  é diferenciável em todos os pontos  $z_0 \in U$ , diz-se analítica ou holomorfa em  $U$ . Uma função que é holomorfa em todo o plano complexo diz-se inteira.

Note-se que  $f$  é diferenciável em  $z_0$  com derivada  $\ell \in \mathbb{C}$  significa que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \ell \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \ell(z - z_0)}{z - z_0} = 0.$$

ou seja que a quantidade

$$(2) \quad |f(z) - (f(z_0) + \ell(z - z_0))|$$

é um infinitésimo de ordem superior a  $|z - z_0|$  (isto é, vai para zero ainda mais depressa que  $|z - z_0|$ ). Uma vez que (2) significa o erro cometido ao aproximar a função  $f(z)$  pela função afim  $f(z_0) + \ell(z - z_0)$ , o conceito de diferenciabilidade pode ser entendido da seguinte forma: uma função é diferenciável em  $z_0$  se pode ser "muito bem aproximada" por uma função particularmente simples (afim) próximo de  $z_0$ . A derivada  $\ell$  é o número complexo que determina essa função afim (o valor da função afim em  $z_0$  tem de ser  $f(z_0)$  pois, como recordaremos em breve, uma função diferenciável é contínua e portanto está necessariamente próxima de  $f(z_0)$  junto a  $z_0$ ).

**Exemplo 6.2.**

(1) *Seja  $f(z) = z$ . Então*

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1$$

para todo o  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

(2) *Seja  $f(z) = z^2$ . Então*

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = z_0 + z_0 = 2z_0$$

para todo o  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

Como é bem sabido do Cálculo de funções reais, a definição não é um método prático para o cálculo de derivadas. As derivadas são calculadas aplicando regras de derivação que, como iremos agora ver, continuam a aplicar-se ao cálculo de derivadas complexas.

**Proposição 6.3. Propriedades da derivada complexa.** *Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto,  $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$  funções e  $z_0 \in U$ .*

(i) *Se  $f$  é diferenciável em  $z_0$  então  $f$  é contínua em  $z_0$ .*

- (ii) Se  $f, g$  são diferenciáveis em  $z_0$  então,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  e  $\alpha f + \beta g$  (com  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ) são diferenciáveis em  $z_0$  e as regras de derivação habituais aplicam-se.
- (iii) Se  $h$  é diferenciável em  $f(z_0)$  então a função composta  $h \circ f$  é diferenciável em  $z_0$  e

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

*Dem.*

- (i) Por definição de derivada temos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, e portanto a expressão

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|$$

é limitada numa vizinhança de  $z_0$  (na realidade até converge para  $|f'(z_0)|$ ). Uma vez que o denominador tende para 0 quando  $z \rightarrow z_0$ , conclui-se que o numerador também tem que tender para 0 quando  $z \rightarrow z_0$ . Isto é,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - f(z_0)| = 0$$

ou seja,  $f$  é contínua em  $z_0$ .

- (ii) A demonstração desta afirmação e da seguinte é uma cópia exacta da demonstração vista em Cálculo 1 e no liceu uma vez que estas usam apenas propriedades dos números reais que permanecem válidas nos complexos. A título de exemplo recordemos a dedução da regra de derivação de  $\frac{1}{f}$  quando  $f$  é diferenciável (e não se anula):

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z_0) - f(z)}{f(z_0)f(z)}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} \frac{1}{f(z)f(z_0)} = -f'(z_0) \frac{1}{f(z_0)^2}$$

onde, na última passagem se usou a definição da derivada  $f'(z_0)$  e o facto de  $f(z)$  convergir para  $f(z_0)$  porque (por (i)) a diferenciabilidade implica continuidade.

A demonstração das restantes afirmações fica como exercício.

□

**6.4. Relação da derivada complexa com a derivada de uma função de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ .** Começamos por uma revisão rápida da diferenciabilidade de funções de  $\mathbb{R}^2$  para  $\mathbb{R}^2$  estudada em Cálculo 2. Seja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função com  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto.

- (1)  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0) \in U$ , se existe uma matriz  $2 \times 2$ ,  $L$  tal que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\|f(x,y) - f(x_0,y_0) - L \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}\|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0.$$

Ou seja,  $f$  é diferenciável se pode ser "muito bem aproximada" pela função afim  $f(x_0, y_0) + L \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$  numa vizinhança de  $(x_0, y_0)$ . A matriz  $L$  chama-se a matriz Jacobiana e denota-se por  $Df(x_0, y_0)$ .

(2) Se  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$  então

$$Df(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

(3) Se  $f$  é de classe  $C^1$  em  $(x_0, y_0)$ , isto é, se as derivadas parciais de  $f$  existem e são contínuas em  $(x_0, y_0)$ , então  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ .

O seguinte Teorema é o primeiro resultado fundamental da Análise Complexa e explica a relação entre a noção de derivada complexa e a noção de derivada estudada em Cálculo 2.

**Teorema 6.5** (Teorema de Cauchy-Riemann). *Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função. Seja  $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$  e  $f(x + iy) = (u(x, y), v(x, y))$ . A função  $f$  é diferenciável (no sentido complexo) em  $z_0$  se e só se*

(1) A função  $(x, y) \mapsto ((u(x, y), v(x, y)))$  é diferenciável (no sentido de Cálculo 2).

(2) Verificam-se as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Se  $f$  é diferenciável em  $z_0$  então

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

*Dem.* Comparemos as definições de diferenciabilidade real e complexa:

- $f$  é diferenciável no sentido real (isto é no sentido de Cálculo 2) se existe uma matriz  $2 \times 2$  com entradas reais  $L$  tal que

$$(3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\|f(x, y) - f(x_0, y_0) - L \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}\|}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0$$

- $f$  é diferenciável no sentido complexo se existe  $\ell = a + bi \in \mathbb{C}$  tal que

$$(4) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - \ell \cdot (z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0$$

Recordemos que  $|x + iy| = \|(x, y)\|$  e que a soma (e portanto a diferença) de complexos é a soma dos vectores do plano correspondentes. Conclui-se que a única diferença entre as expressões (3) e (4) reside na diferença entre

$$L \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \text{ em (3)}$$

e

$\ell \cdot (z - z_0)$  em (4).

Para comparar estas expressões escrevemos esta última como um vector de  $\mathbb{R}^2$ : fazendo  $\ell = a + bi$  temos

$$\ell \cdot (z - z_0) = (a + bi) \cdot ((x - x_0) + i(y - y_0)) = a(x - x_0) - b(y - y_0) + i(a(y - y_0) + b(x - x_0))$$

que corresponde ao vector de  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} a(x - x_0) - b(y - y_0) \\ a(y - y_0) + b(x - x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

Conclui-se portanto que (4) é exactamente equivalente à existência de uma derivada real  $L$  da forma especial  $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ , isto é, satisfazendo as equações de Cauchy-Riemann.

Daqui conclui-se ainda que

$$f'(z_0) = \ell = a + bi = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

□

**Exemplo 6.6. A exponencial complexa é diferenciável.** *Consideremos a exponencial complexa  $f(z) = e^z$ . Então  $u(x, y) = e^x \cos y$  e  $v(x, y) = e^x \sin y$ . Como  $u, v$  são funções de classe  $C^1$ , a função  $(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$  é diferenciável no sentido de Cálculo 2. Verifiquemos que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) &= e^x \cos y = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y) \\ \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) &= -e^x \sin y = -\frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) \end{aligned}$$

Conclui-se que a exponencial complexa é uma função inteira (isto é, que é diferenciável em todos os pontos de  $\mathbb{C}$ ). Além disso

$$f'(x_0 + iy_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = e^{x_0} \cos y_0 + i e^{x_0} \sin y_0 = e^{x_0 + iy_0}$$

ou seja, permanece válida a regra habitual para a derivada da exponencial:

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^z.$$

## 7. DERIVADA DO LOGARITMO

**Exemplo 7.1.** *Determinar o conjunto dos pontos onde a função  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(x + iy) = (xy - y^2) + i(x + y^3)$  é diferenciável e calcular a derivada nesses pontos.*



As funções  $u(x, y) = xy - y^2$  e  $v(x, y) = x + y^3$  são de classe  $C^1$  logo  $f$  é diferenciável precisamente nos pontos onde são satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3y^2 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } y = \frac{1}{3} \\ x = -1 + 2y \end{cases}$$

Conclui-se que os únicos pontos de  $\mathbb{C}$  onde  $f$  é diferenciável são  $-1 + 0i$  e  $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$ . Nestes pontos a derivada complexa é dada por  $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = y + i$ . Ou seja

$$f'(-1) = i \quad e \quad f'(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i) = \frac{1}{3} + i.$$

**7.2. Mais regras de derivação.** As funções trigonométricas são diferenciáveis no seu domínio e as regras de derivação são as usuais:

$$(\operatorname{sen} z)' = \operatorname{cos} z, \quad (\operatorname{cos} z)' = -\operatorname{sen} z, \quad (\operatorname{senh} z)' = \operatorname{cosh} z, \quad (\operatorname{cosh} z)' = \operatorname{senh} z.$$

Verifiquemos por exemplo o caso de  $z \mapsto \operatorname{sen} z$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) &= \frac{d}{dz} \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) \\ &= \frac{ie^{iz} - (-i)e^{-iz}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \operatorname{cos} z. \end{aligned}$$

(onde, na passagem da primeira para a segunda linha, aplicámos as regras da derivação de uma combinação linear, da exponencial e da função composta).

Quanto aos logaritmos e potências de expoente complexo, vimos já nos Exemplos 5.7 e 5.8 que não podem ser definidas enquanto funções contínuas em todo o domínio  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Como as funções diferenciáveis são necessariamente contínuas, resulta que uma função logaritmo ou uma potência complexa não pode ser diferenciável no seu domínio. É no entanto verdade que estas funções são diferenciáveis no seu domínio de continuidade e que, nesses pontos, as regras de derivação habituais se aplicam:

$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z} \quad \text{no domínio de continuidade da função logaritmo escolhida,}$$

como iremos ver de seguida.

A partir da regra anterior é fácil verificar a regra habitual para as potências de expoente complexo:

$$\frac{d}{dz}(z^\alpha) = \frac{d}{dz}(e^{\alpha \log z}) = \frac{\alpha}{z} e^{\alpha \log z} = \frac{\alpha}{z} z^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}$$

sendo esta expressão válida no domínio de continuidade do logaritmo utilizado para definir a potência de expoente  $\alpha$ .

A regra de derivação de uma exponencial de base complexa é também a usual. A única subtilidade é que a função exponencial só fica definida quando escolhemos um dos logaritmos

da base. Para  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  temos

$$\frac{d}{dz} (\alpha^z) = \frac{d}{dz} (e^{z \log \alpha}) = \log(\alpha) e^{z \log \alpha} = \log(\alpha) \alpha^z$$

expressão que é válida para todo o  $z \in \mathbb{C}$ . Convém enfatizar uma vez mais que a definição da função (e o resultado da derivada) dependem de uma escolha de logaritmo complexo para a base  $\alpha$  da exponencial.

**7.3. A regra de derivação do logaritmo.** Recorde-se que a escolha de uma função logaritmo

$$f(z) = \log |z| + i \arg(z)$$

corresponde à escolha de um argumento para cada número complexo. Uma tal função é necessariamente descontínua em alguns pontos do seu domínio, nomeadamente "aqueles em que o argumento salta". Uma vez que diferenciabilidade num ponto implica continuidade no mesmo, conclui-se que há certos pontos do domínio onde a função logaritmo não é diferenciável. Verifica-se no entanto que uma função logaritmo  $f$  é diferenciável em todos os pontos onde é contínua e que nesses pontos vale a regra de derivação habitual

$$f'(z) = \frac{1}{z}.$$

Que a regra de derivação é a indicada, é uma consequência da regra de derivação da função composta: por definição de logaritmo temos  $e^{f(z)} = e^{\log z} = z$ . Derivando esta expressão obtemos em qualquer ponto onde  $f$  seja diferenciável:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (e^{f(z)}) &= \frac{d}{dz} (z) \\ \Leftrightarrow f'(z) e^{f(z)} &= 1 \\ \Leftrightarrow f'(z) z &= 1 \\ \Leftrightarrow f'(z) &= \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Resta perceber porque é que  $f$  é de facto diferenciável nos pontos onde é contínua. Iremos ver isto em seguida no caso em que  $f(z)$  é a função determinada pela escolha do argumento principal, mas antes vejamos como aplicar a regra num exemplo.

**Exemplo 7.4.** *Determinar o conjunto dos pontos onde a função  $g(z) = (z^2 + 1)^z$  determinada pela escolha do argumento principal é diferenciável e calcular a derivada nesses pontos.*

*Por definição de potência de expoente complexo temos  $g(z) = e^{z \log(z^2+1)}$ . Pela regra de derivação da função composta, esta função é diferenciável no conjunto dos pontos onde  $\log(z^2 + 1)$  é diferenciável. Uma vez que, de acordo com a regra indicada acima, a função logaritmo escolhida é diferenciável excepto em  $]-\infty, 0] \subset \mathbb{C}$ , conclui-se da regra de derivação da função composta que  $\log(z^2 + 1)$  é diferenciável em*

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z^2 + 1 \in ]-\infty, 0]\}.$$

Temos

$$z^2 + 1 \leq 0 \Leftrightarrow z^2 \leq -1 \Leftrightarrow z = iy \text{ com } y \geq 1 \text{ ou } y \leq -1$$

portanto o domínio de diferenciabilidade de  $g$  é<sup>1</sup>

$$\mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}.$$

Nesse conjunto, a derivada é dada por

$$g'(z) = (z \log(z^2 + 1))' e^{z \log(z^2 + 1)} = \left( \log(z^2 + 1) + z \frac{2z}{z^2 + 1} \right) (z^2 + 1)^z.$$

Veamos agora que a função logaritmo definida por

$$f(z) = \log |z| + i \arg(z) \quad \text{com } \arg(z) \in ] -\pi, \pi]$$

é diferenciável no seu domínio de continuidade, isto é, em  $U = \mathbb{C} \setminus \{x + 0i : x \leq 0\}$ . A restrição da função  $f$  a  $U$  tem imagem  $V = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$  e  $f(z)$  é a função inversa da restrição da exponencial complexa a  $V$ , que iremos denotar por

$$g : V \rightarrow U \quad \text{definida por } g(z) = e^z.$$

Uma vez que a função  $g$ , definida por  $g(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$  é de classe  $C^1$ , o Teorema da Função Inversa (de Cálculo 2) garante a diferenciabilidade de  $f = g^{-1}$  (no sentido real) desde que o Jacobiano de  $g$ ,  $\det Dg$ , não se anule. Ora

$$\det Dg(x, y) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} (\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} \neq 0,$$

logo podemos concluir que  $f$  é diferenciável no sentido real.

Resta-nos ver que a matriz jacobiana  $Df(x, y)$  tem as propriedades de simetria codificadas nas equações de Cauchy-Riemann: A regra de derivação da função inversa (de Cálculo 2) diz que

$$(5) \quad Df((x, y)) = (Dg(f(x, y)))^{-1}.$$

Como  $g$  é diferenciável no sentido complexo, sabemos que  $Dg$  tem (em qualquer ponto) a forma

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R}.$$

Pela fórmula para a inversa de uma matriz  $2 \times 2$ , segue-se que  $Df(x, y)$  tem a forma

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

pelo que as derivadas parciais de  $f$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. Conclui-se que  $f$  é diferenciável no sentido complexo em  $U$ .

---

<sup>1</sup>Mais precisamente, mostrámos que o domínio de diferenciabilidade contém este conjunto. É no entanto fácil de verificar que nos restantes pontos do domínio de  $g$  a função não é contínua e portanto não é diferenciável.

Alternativamente, para verificar a diferenciabilidade de  $f$ , é possível escrever  $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  e verificar directamente que  $u, v$  são  $C^1$  e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. No entanto a expressão para  $v(x, y)$ , isto é, para o argumento em termos das coordenadas cartesianas no domínio  $U$  não é simples (exercício), o que torna a verificação algo trabalhosa. No domínio  $\{x+iy: x > 0\} \subset V$  tem-se  $u(x, y) = \log \sqrt{x^2+y^2}$  e  $v(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$  e é então fácil verificar directamente a diferenciabilidade de  $f$  no domínio.

## 8. FUNÇÕES HARMÓNICAS

A pergunta natural que vamos agora considerar é a seguinte: Que funções reais da forma  $u(x, y)$  podem ocorrer como partes reais de funções holomorfas?

**Definição 8.1.** *Seja  $V \subset \mathbb{R}^2$  um aberto. Uma função  $u: V \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se harmónica se  $u$  é de classe  $C^2$  (isto é tem segundas derivadas parciais contínuas) e satisfaz a equação de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ em } V.$$

A equação de Laplace desempenha um papel muito importante em Física e Engenharia pelo que é importante ter métodos práticos para achar soluções da equação. O próximo resultado mostra como a Análise Complexa pode ajudar a resolver este problema: podem obter-se soluções para a equação de Laplace num domínio tomando a parte real de funções holomorfas nesse domínio.

**Proposição 8.2.** *Seja  $V \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa, de classe  $C^2$ . Escrevendo  $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , tem-se que a parte real  $u(x, y)$  é harmónica em  $V$ .*

*Dem.* Temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

onde na segunda igualdade usámos as equações de Cauchy-Riemann (válidas porque  $f$  é holomorfa) e na terceira passagem o Lema de Schwarz que dá a igualdade das derivadas cruzadas (que se pode aplicar porque  $f$  (e portanto  $v$ ) é  $C^2$ ).  $\square$

**Nota 8.3.** *Veremos mais tarde que uma função holomorfa num aberto  $V \subset \mathbb{C}$  é automaticamente de classe  $C^2$  nesse aberto pelo que, no resultado anterior, a hipótese de  $f$  ser  $C^2$  é desnecessária.*

**Nota 8.4.** *Se  $f = u + iv$  é holomorfa então  $-if = v - iu$  é também holomorfa. Conclui-se que as condições "ser parte real de uma função holomorfa" e "ser parte imaginária de uma função holomorfa" são equivalentes. Em particular, a parte imaginária de uma função holomorfa é também uma função harmónica.*

**Definição 8.5.** *Se  $f = u + iv$  é holomorfa e de classe  $C^2$  (ver no entanto a Nota 8.3),  $v$  diz-se uma harmónica conjugada de  $u$ .*

**Exemplo 8.6.** Vamos verificar que  $u(x, y) = 2xy$  é harmónica e determinar uma harmónica conjugada: Claramente  $u$  é de classe  $C^2$ . Tem-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} (2y) + \frac{\partial}{\partial y} (2x) = 0 + 0 = 0$$

logo  $u$  é harmónica. Uma harmónica conjugada tem que satisfazer as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (2xy) = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} (2xy) = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(x, y) = y^2 + C(x) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -2x \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda obtém-se uma equação para a função  $C(x)$  a determinar:

$$\frac{\partial}{\partial x} (y^2 + C(x)) = -2x \Leftrightarrow C'(x) = -2x \Leftrightarrow C(x) = -x^2 + K \text{ com } K \in \mathbb{R}.$$

Obtém-se assim a seguinte expressão para uma harmónica conjugada

$$v(x, y) = y^2 - x^2 + K, \text{ com } K \in \mathbb{R}.$$

Note-se que  $v$  é de facto uma harmónica conjugada pois  $v$  é  $C^2$  e o par  $u, v$  satisfaz as equações de Cauchy-Riemann (porque  $v$  foi achada precisamente de forma a que as satisfizesse!).

Embora não seja verdade que toda a função harmónica é parte real de uma função holomorfa, essa afirmação é válida quando o domínio em questão é *simplesmente conexo* (recorde-se de Cálculo 2 que um subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  é simplesmente conexo se "não tem buracos").

**Proposição 8.7.** Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto simplesmente conexo e  $u: U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmónica. Então existe uma função holomorfa  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $u = \operatorname{Re}(f)$ .

*Dem.* Para achar uma função holomorfa  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  da forma  $f = u + iv$  basta achar uma solução do sistema dado pelas equações de Cauchy-Riemann tomando para  $u$  a função dada. De facto, uma solução  $v$  será automaticamente de classe  $C^2$  (pelas equações de Cauchy-Riemann, uma vez que as derivadas parciais de  $u$  são de classe  $C^1$ ) e o Teorema de Cauchy-Riemann garantirá portanto que  $f$  é holomorfa.

Podemos escrever o sistema para  $v$  na forma

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

e nesta forma reconhecemos de Cálculo 2 que se trata de um sistema para determinar o potencial escalar  $v(x, y)$  do campo vectorial  $\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$  no domínio  $U$ . Uma vez que  $U$  é simplesmente conexo, sabemos de Cálculo 2 que o potencial escalar existe (isto é,

$\vec{F}(x, y)$  é conservativo, ou um gradiente) desde que  $\vec{F}(x, y)$  seja um campo fechado<sup>2</sup>. Mas

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

são iguais porque  $u$  é harmónica. Conclui-se que  $\vec{F}(x, y)$  é um gradiente e portanto existe a solução  $v$  pretendida.  $\square$

**Exemplo 8.8. Uma função harmónica que não é a parte real de uma função holomorfa.** Seja  $u: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida pela expressão

$$u(x, y) = \log \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

Então  $u$  é claramente de classe  $C^2$  no seu domínio. Como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Por simetria,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  obtém-se substituindo  $x$  por  $y$  na expressão acima, logo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{(y^2 - x^2) + (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

e  $u$  é portanto harmónica no seu domínio.

Note-se agora que  $u(x, y) = \operatorname{Re}(\log(x+iy))$  (onde  $\log$  é um qualquer logaritmo complexo). Suponhamos que existe uma função holomorfa  $f(z)$  com  $\operatorname{Re}(f) = u$  e seja  $\log z$  a função logaritmo definida pela escolha do argumento principal. Então  $f(z) - \log(z)$  tem parte real nula e é diferenciável em  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ . Segue então das equações de Cauchy-Riemann que a parte imaginária de  $f(z) - \log(z)$  tem derivadas parciais nulas em  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$  e é portanto constante. Ou seja, existe  $K \in \mathbb{R}$  tal que

$$f(z) - \log z = iK \Leftrightarrow f(z) = \log z + iK \text{ para } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$$

Como  $\log z$  é descontínua em  $\mathbb{R}^- \subset \mathbb{C}$ , a função  $f(z)$  é também descontínua nesse conjunto o que contraria a hipótese de  $f(z)$  ser diferenciável em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Conclui-se que não existe uma função holomorfa com  $\operatorname{Re}(f) = u$  em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

No aberto mais pequeno  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ , que é simplesmente conexo, a função  $u(x, y)$  é a parte real da função holomorfa  $\log(z)$ .

<sup>2</sup>Recorde-se que  $\vec{F} = (F_1, F_2)$  se diz fechado se  $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ .

## 9. CAMINHOS E CURVAS NO PLANO COMPLEXO

Vamos agora iniciar o estudo da integração de funções complexas. Como veremos, o integral em questão é inteiramente análogo ao integral de caminho de um campo vectorial em  $\mathbb{R}^2$  estudado em Cálculo 2. Começamos por rever algumas noções sobre curvas e caminhos estudadas em Cálculo 2.

**Definição 9.1.** Um caminho em  $\mathbb{C}$  é uma função contínua  $g: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$  onde  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$  e  $t_0 \leq t_1$ .  $g(t_0)$  diz-se o ponto inicial de  $g$  e  $g(t_1)$  diz-se o ponto final de  $g$ . Se  $g(t_0) = g(t_1)$ ,  $g$  diz-se um caminho fechado.

A imagem de um caminho (que é um subconjunto de  $\mathbb{C}$ ) diz-se uma curva e dada uma curva  $C \subset \mathbb{C}$ , um caminho  $g$  com imagem  $C$  diz-se uma parametrização ou representação paramétrica de  $C$ .

É útil representar mentalmente um caminho como descrevendo a posição de uma partícula que se move no plano em função do tempo. É importante distinguir entre curva e caminho. Se um caminho descreve a evolução de uma partícula em função do tempo, a curva que ele parametriza é a trajectória da partícula. Um caminho contém mais informação do que a curva que parametriza: diz-nos *como* é que a curva é percorrida em função do tempo. Uma curva que contenha mais do que um ponto admite sempre infinitas parametrizações distintas.

### Exemplo 9.2.

(i) **Segmentos de recta.** Se  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ , o caminho  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  definido pela expressão

$$g(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$$

é uma parametrização do segmento de recta que une  $z_0$  a  $z_1$ . O ponto inicial é  $z_0$  e o ponto final é  $z_1$ .

(ii) **Arcos de circunferência.** Seja  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $r > 0$ . O caminho  $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  definido por

$$g(t) = z_0 + re^{it}$$

parametriza uma circunferência de raio  $r$  centrada em  $z_0$ .  $g$  é um caminho fechado.

(iii) **Gráficos de funções.** Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. O caminho  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definido pela expressão

$$g(t) = t + if(t)$$

parametriza o gráfico de  $f$ . Por exemplo,

$$g(t) = t + it^2, \quad t \in [0, 1]$$

parametriza o arco da parábola  $y = x^2$  que une os pontos  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ .

Recorda-se que se um caminho  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , é diferenciável em  $t_0 \in [a, b]$ , a derivada  $g'(t_0)$  é um vector tangente à curva parametrizada por  $g$ . Se pensarmos em  $g$  como descrevendo a evolução de uma partícula,  $g'(t_0)$  é a velocidade instantânea da partícula no instante  $t_0$ .

**Definição 9.3.** Um caminho  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  diz-se regular se  $g$  é de classe  $C^1$ . Um caminho diz-se seccionalmente regular se  $[a, b]$  pode ser escrito como uma união finita de intervalos  $I_j$  tais que a restrição de  $g$  a cada  $I_j$  é regular.

Intuitivamente, um caminho é seccionalmente regular se a sua imagem tem tangente em "praticamente" todos os pontos (isto é, todos excepto um número finito)<sup>3</sup>. O integral de caminho de uma função complexa será definido apenas ao longo de caminhos seccionalmente regulares.

**Exemplo 9.4.**

- (i) Consideremos o caminho  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  definido por  $g(t) = t + it^2$ . Trata-se de um caminho regular. Para achar a recta tangente ao arco de parábola parametrizado por  $g$  no ponto  $\frac{1}{2} + \frac{i}{4}$ , podemos achar o parâmetro que correspondea este ponto

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{i}{4} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

e calcular

$$g'(t) = 1 + 2it \Rightarrow g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + i$$

A recta tangente à curva descrita por  $g(t)$  em  $\frac{1}{2} + \frac{i}{4}$  tem então a descrição paramétrica

$$\frac{1}{2} + \frac{i}{4} + s(1 + i) = \left(\frac{1}{2} + s\right) + i\left(\frac{1}{4} + s\right), \quad s \in \mathbb{R}.$$

- (ii) Sendo

$$g(t) = e^{it}, \quad \text{com } 0 \leq t \leq 2\pi$$

tem-se

$$g'(t) = ie^{it}$$

(note-se que podemos aplicar as regras de derivação habituais para calcular  $g'(t)$ : por definição de derivada, se  $g(t)$  é a restrição de uma função holomorfa a um intervalo do eixo real,  $g'(t)$  é a restrição da derivada complexa a esse intervalo). O vector  $g'(t)$  obtém-se do ponto  $g(t) = e^{it}$  rodando  $90^\circ$  no sentido directo e é portanto tangente à circunferência (e aponta na direcção em que esta está a ser percorrida).

- (iii) O caminho  $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  definido por  $g(t) = t + i|t|$  é seccionalmente regular. O único ponto de  $[-1, 1]$  onde  $g$  não é diferenciável é  $t = 0$ , e nesse ponto a curva parametrizada por  $g$  não admite tangente.

## 10. INTEGRAL DE CAMINHO DE UMA FUNÇÃO COMPLEXA

Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a \leq b$ , e  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua excepto possivelmente num número finito de pontos de  $[a, b]$ . Podemos escrever

$$f(t) = u(t) + iv(t), \quad \text{com } u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

---

<sup>3</sup>Para que isto seja estritamente verdade devíamos ainda assumir que a derivada de  $g$  não se anula nos pontos onde está definida.



Define-se o integral de  $f$  no intervalo  $[a, b]$  pela expressão

$$(6) \quad \int_a^b f(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \left( \int_a^b u(t) dt \right) + i \left( \int_a^b v(t) dt \right).$$

**Exemplo 10.1.** *Seja  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(t) = e^{it}$ . Então*

$$\int_0^\pi e^{it} dt = \int_0^\pi (\cos t + i \sin t) dt = \left( \int_0^\pi \cos t dt \right) + i \left( \int_0^\pi \sin t dt \right) = 0 + i2 = 2i.$$

**Definição 10.2.** *Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua. Dado um caminho  $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow U$ , define-se o integral de caminho de  $f$  ao longo do caminho seccionalmente regular  $\gamma$  como*

$$\int_\gamma f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Note-se que o integral que aparece do lado direito na definição anterior é da forma (6) e está portanto definido. O facto de o caminho  $\gamma$  ser seccionalmente regular garante que o integral da direita existe (a função integranda é descontínua quando muito num número finito de pontos).

Note-se também que esta definição é muito parecida com a de integral de caminho de um campo vectorial. De facto  $f(z)$  pode ser visto como um campo vectorial no aberto  $U$  e a única diferença entre a expressão acima e a estudada em Cálculo 2 para o integral de  $f$  ao longo de  $\gamma$  é que o produto interno de vectores na definição de Cálculo 2 foi substituído pelo produto de números complexos.

**Exemplo 10.3.** *Seja  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  o caminho definido por  $\gamma(t) = e^{it}$  e  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  a função definida por  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Então*

$$\gamma'(t) = ie^{it}$$

e portanto

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

**10.4. Propriedades do integral de caminho.** Como iremos ver nesta e nas próximas aulas, o integral de caminho de uma função complexa tem propriedades análogas ao integral de caminho de um campo vectorial estudado em Cálculo 2. Começemos primeiro por notar algumas propriedades elementares do integral de uma função complexa de variável real definido em (6).

**Proposição 10.5.** *Propriedades do integral de uma função complexa de variável real.*

**1. Linearidade.** *Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  e  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tem-se*

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

2. **Aditividade.** Dados  $a, b, c \in \mathbb{R}$  com  $a \leq c \leq b$  e  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tem-se

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

3. **Regra de Barrow.** Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma função de classe  $C^1$ . Então

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

*Dem.*

1. Deixa-se como exercício.

2. É imediato da definição (6) e da propriedade análoga do integral de Cálculo 1. Note-se que esta propriedade exprime a "associatividade da soma".

3. Escrevendo  $f(t) = A(t) + iB(t)$  com  $A, B: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , temos  $f'(t) = A'(t) + iB'(t)$  e portanto

$$\int_a^b f'(t) dt = \int_a^b A'(t) dt + i \int_a^b B'(t) dt = A(b) - A(a) + i(B(b) - B(a)) = f(b) - f(a)$$

onde na segunda igualdade usamos a regra de Barrow de Cálculo 1.

□

**Proposição 10.6.** *Propriedades do integral de caminho de uma função complexa. Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{C}$*

1. **Linearidade.** Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  um caminho seccionalmente regular e  $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$  tem-se

$$\int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz$$

2. **Aditividade.** Dados  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  um caminho seccionalmente regular e  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $a \leq c \leq b$ , seja  $\gamma_1$  a restrição de  $\gamma$  ao intervalo  $[a, c]$  e  $\gamma_2$  a restrição de  $\gamma$  ao intervalo  $[c, b]$  ( $\gamma$  diz-se a concatenação de  $\gamma_1$  e de  $\gamma_2$ ). Então

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

3. **Regra de Barrow.** Seja  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa de classe<sup>4</sup>  $C^1$  e  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  um caminho seccionalmente regular. Então

$$\int_{\gamma} f'(z)dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

4. **Desigualdade triangular.** Seja  $\gamma$  um caminho seccionalmente regular em  $U$ . Então

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| ds$$

---

<sup>4</sup>Veremos mais tarde que uma função holomorfa é necessariamente de classe  $C^1$ .

onde o integral do lado direito na expressão anterior é o integral de caminho do campo escalar  $|f(z)|$  estudado em Cálculo 2.

5. **Invariância por reparametrização.** Sejam  $\gamma_1: [t_0, t_1] \rightarrow U$  e  $\gamma_2: [u_0, u_1] \rightarrow U$  dois caminhos seccionalmente regulares e  $\phi: [t_0, t_1] \rightarrow [u_0, u_1]$  uma função bijectiva de classe  $C^1$  com  $\phi'(t) \neq 0$ , tal que  $\gamma_1(t) = \gamma_2(\phi(t))$  (diz-se que  $\gamma_1$  é uma reparametrização de  $\gamma_2$ ). Então

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \pm \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

onde o sinal é  $+$  se  $\phi'(t) > 0$  (isto é se os caminhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  percorrem a sua imagem comum no mesmo sentido) e o sinal é  $-$  se  $\phi'(t) < 0$  (isto é, se os caminhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  têm sentidos opostos).

*Dem.*

1. Segue imediatamente da definição e da Proposição 10.5(i).
2. Segue imediatamente da definição e da Proposição 10.5(ii).
3. Pela definição de integral temos

$$\int_{\gamma} f'(z)dz = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (f(\gamma(t))) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

onde na última passagem usámos a Proposição 10.5(iii). A aplicação da regra da derivação da função composta na segunda igualdade exige alguma explicação uma vez que estamos a compor uma função complexa de variável complexa com uma função complexa de variável real: interpretando  $f$  como uma função de  $U$  para  $\mathbb{R}^2$ , a regra da derivação da função composta de Cálculo 2 diz que

$$\frac{d}{dt} (f(\gamma(t))) = Df(\gamma(t))\gamma'(t).$$

Mas, conforme explicado na demonstração do Teorema de Cauchy-Riemann, sendo  $f$  uma função holomorfa, o vector  $Df(\gamma(t))\gamma'(t)$  identifica-se com o complexo  $f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ .

4. Seja  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  um caminho seccionalmente regular. Por definição do integral de caminho temos

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \right|$$

A desigualdade triangular para integrais de funções complexas de variável real é uma consequência da definição do integral de Cálculo 1 (do integral como um limite de certas somas finitas) e da desigualdade triangular para a soma de números complexos (exercício). Aplicando esta desigualdade obtém-se

$$\left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt = \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt = \int_{\gamma} |f(z)|ds$$

onde na última igualdade se aplicou a definição de integral de campo escalar de Cálculo 2.

5. Por definição tem-se

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{u_0}^{u_1} f(\gamma_2(u))\gamma_2'(u)du$$

e fazendo a mudança de variável  $u = \phi(t)$  no integral do lado direito obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\phi^{-1}(u_0)}^{\phi^{-1}(u_1)} f(\gamma_2(\phi(t)))\gamma_2'(\phi(t))\phi'(t)dt &= \int_{\phi^{-1}(u_0)}^{\phi^{-1}(u_1)} f(\gamma_1(t))\frac{d}{dt}(\gamma_2(\phi(t))) dt \\ &= \int_{\phi^{-1}(u_0)}^{\phi^{-1}(u_1)} f(\gamma_1(t))\gamma_1(t)dt. \end{aligned}$$

Se  $\phi'(t) > 0$  então  $\phi^{-1}(u_1) = t_1$  e  $\phi^{-1}(u_0) = t_0$  e o último integral é igual a  $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ . Caso contrário, tem-se  $\phi^{-1}(u_1) = t_0$  e  $\phi^{-1}(u_0) = t_1$  e portanto o último integral é  $-\int_{\gamma_1} f(z)dz$ . □

Observe-se que a regra de Barrow implica que o integral de caminho de uma função complexa contínua  $f(z)$  que seja primitivável depende apenas das extremidades do caminho. Outra consequência é que se  $f(z)$  é primitivável num aberto  $U$ , então o integral de  $f$  ao longo de qualquer caminho fechado em  $U$  é 0. O Exemplo 10.3 mostra portanto que  $f(z) = \frac{1}{z}$  não é primitivável em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Exemplo 10.7.** *Seja  $\gamma$  um caminho seccionalmente regular em  $\mathbb{C}$  com ponto inicial 0 e ponto final  $i$ . Pela regra de Barrow temos*

$$\int_{\gamma} (e^{2z} + z^2) dz = \left. \frac{e^{2z}}{2} + \frac{z^3}{3} \right|_0^i = \frac{e^{2i} - 1}{2} - \frac{i}{3}.$$

Um exemplo simples da invariância por reparametrização é o seguinte: Tome-se

$$\gamma_1(t) = e^{it} \quad \text{com } 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{e} \quad \gamma_2(u) = e^{2\pi i u} \quad \text{com } 0 \leq u \leq 1$$

Ambos estes caminhos parametrizam a circunferência de raio 1 centrada na origem e percorrem-na no sentido directo (mas fazem-no a velocidades diferentes). Considerando a mudança de variável

$$u = \phi(t) = \frac{t}{2\pi}$$

tem-se  $\gamma_1(t) = \gamma_2(\phi(t))$  e a proposição diz que o cálculo de um integral ao longo dos caminhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  produz sempre o mesmo resultado.

Informalmente, a invariância por reparametrização diz que o integral de caminho depende apenas da curva parametrizada e do sentido em que é percorrida. Por esta razão é frequente escrever, por exemplo,

$$\oint_{|z|=1} f(z)dz$$

para o integral ao longo de um qualquer caminho (regular, cuja derivada nunca se anula) que percorre a circunferência de raio 1 centrada na origem no sentido directo (uma vez).

Uma vez que "o integral é uma soma", a desigualdade triangular exprime a ideia que "o módulo da soma é menor ou igual à soma dos módulos". Mais tarde será importante estimar o valor de integrais complexos que não sabemos calcular e para isso iremos usar a desigualdade triangular. Tipicamente, aplica-se a desigualdade triangular majorando a função que se está a integrar sobre o caminho por uma constante: se  $|f(z)| \leq M$  para  $z$  na imagem do caminho  $\gamma$  então

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| ds \leq \int_{\gamma} M ds = M \ell(\gamma)$$

onde  $\ell(\gamma)$  denota o comprimento do caminho  $\gamma$  (recorde-se de Cálculo 2, que o integral do campo escalar constante igual a 1 calcula o comprimento do caminho). Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 10.8.**

(1) Majorar  $\left| \int_{\gamma} e^{z^2} dz \right|$  onde  $\gamma(t) = e^{it}$  com  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ . Tem-se

$$\left| e^{(x+iy)^2} \right| = \left| e^{(x^2-y^2)+i(2xy)} \right| = e^{x^2-y^2}$$

Na circunferência  $|z| = 1$  tem-se  $x^2 \leq 1$  e  $y^2 \geq 0$  logo  $x^2 - y^2 \leq 1$ . Conclui-se portanto que

$$\left| e^{z^2} \right| \leq e^1 \text{ para } |z| = 1$$

e portanto, pela desigualdade triangular

$$\left| \int_{\gamma} e^{z^2} dz \right| \leq \int_{\gamma} e ds = e \ell(\gamma) = e\pi.$$

(2) Majorar  $\left| \oint_{|z|=2} \frac{z-2}{z^2+3} dz \right|$ . Para  $|z| = 2$  temos

$$|z-2| \leq |z| + 2 \leq 2 + 2 = 4 \quad e \quad |z^2+3| \geq |z^2| - 3 = |z|^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

(onde usamos as propriedades do módulo da Proposição 1.2 (v) e (vi)). Portanto

$$\left| \frac{z-2}{z^2+3} \right| \leq \frac{4}{1} = 4 \quad \text{para } |z| = 2$$

e logo

$$\left| \oint_{|z|=2} \frac{z-2}{z^2+3} dz \right| \leq 4\ell(\gamma) = 4 \cdot 4\pi = 16\pi.$$

## 11. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

A regra de Barrow (Proposição 10.6 3.) dá-nos um método para calcular o integral de uma função primitivável. Por esta razão é importante saber quando uma função complexa é primitivável. A resposta é substancialmente mais complicada que em Cálculo 1. Começamos por estabelecer um critério importante a que chamamos o Teorema Fundamental do Cálculo.

Recorde-se primeiro de Cálculo 2, que um subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{C}$  se diz *conexo* (por arcos) se dados dois pontos quaisquer  $z_0, z_1 \in U$  existe um caminho  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  com  $\gamma(a) = z_0$  e  $\gamma(b) = z_1$ .

**Exemplo 11.1.**  $\mathbb{C}$  é conexo (podemos ligar quaisquer dois pontos de  $\mathbb{C}$  por um segmento de recta). O conjunto  $U = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) \neq 0\}$  não é conexo: por exemplo, os pontos  $z_0 = 1 + i$  e  $z_1 = -2 + 3i$  não podem ser unidos por um caminho em  $U$ . O conjunto  $U$  é no entanto uma união de dois abertos conexos, nomeadamente  $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) > 0\}$  e  $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) < 0\}$ .

A situação exemplificada pelo conjunto  $U$  do exemplo anterior é completamente geral: qualquer aberto  $V \subset \mathbb{C}$  pode ser escrito como uma união de conjuntos abertos e conexos, disjuntos dois a dois, que se chamam as componentes conexas de  $V$ .

**Exemplo 11.2.**  $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$  é também conexo. Embora o segmento de recta que une um ponto  $z_0$  do segundo quadrante a um ponto  $z_1$  do terceiro quadrante não esteja contido em  $U$ , é possível unir esses pontos por um caminho em  $U$ . Podemos fazê-lo, por exemplo, com dois segmentos de recta.

**Teorema 11.3** (Teorema Fundamental do Cálculo). *Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1)  $f$  tem uma primitiva complexa, isto é, existe  $F: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que  $F'(z) = f(z)$ .
- (2)  $\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$  para todo o caminho seccionalmente regular fechado  $\gamma$  em  $U$ .
- (3) Sendo  $\gamma$  um caminho seccionalmente regular em  $U$ , o integral  $\int_{\gamma} f(z)dz$  depende apenas dos extremos de  $\gamma$ . Isto é, dados dois caminhos seccionalmente regulares  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  em  $U$  com os mesmos ponto inicial e final, tem-se  $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$ ,

Quando uma das (e portanto todas as) condições anteriores se verifica e  $U$  é conexo, uma primitiva de  $f(z)$  é dada pelo integral indefinido

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w)dw$$

onde  $z_0$  é um ponto qualquer de  $U$  fixado.

**Nota 11.4.** O Teorema 11.3 é inteiramente análogo ao Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de campos vectoriais estudado em Cálculo 2, que dá condições necessárias e suficientes para que um campo vectorial seja um gradiente.

Recorde-se de Cálculo 1 que uma função real de variável real é primitivável desde que seja contínua. Isto já não se verifica para funções complexas de variável complexa como mostra o exemplo seguinte.

**Exemplo 11.5.** *Seja  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  a função definida por  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Uma vez que*

$$(7) \quad \oint_{|z|=1} f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} = 2\pi i \neq 0$$

conclui-se que  $f$  não é primitivável em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Note-se no entanto que a função  $g: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{C}$  definida pela mesma expressão, isto é  $g(z) = \frac{1}{z}$  é primitivável (uma primitiva é, como sabemos, a função logaritmo determinada pelo argumento principal). Não há qualquer contradição com o Teorema 11.3 porque o caminho de integração usado em (7) intersecta o eixo real e portanto não tem imagem contida no domínio de  $g$ . Este exemplo mostra-nos que a existência de uma primitiva é fortemente dependente do domínio em questão (e não apenas da expressão pela qual a função em causa é definida).

*Demonstração do Teorema 11.3.* Vamos mostrar que se tem a seguinte cadeia de implicações: (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (1). Na demonstração da última implicação será também demonstrada a fórmula para a primitiva em termos do integral indefinido.

(1)  $\Rightarrow$  (2): É uma consequência imediata da regra de Barrow: Sendo  $z_0$  o ponto inicial e final de  $\gamma$  e  $F(z)$  uma primitiva tem-se

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = F(z_0) - F(z_0) = 0.$$

(2)  $\Rightarrow$  (3): Sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  dois caminhos seccionalmente regulares em  $U$  com ponto inicial  $z_0$  e ponto final  $z_1$ . Escrevendo  $-\gamma_2$  para um caminho que percorre a imagem de  $\gamma_2$  no sentido oposto, consideramos o caminho fechado  $\gamma$  obtido por concatenação de  $\gamma_1$  e  $-\gamma_2$  (informalmente  $\gamma = \gamma_1 \cup -\gamma_2$ ). Então

$$0 = \int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{-\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

onde a primeira igualdade é a hipótese (2), a segunda é uma consequência da aditividade do integral, e a terceira da invariância do integral por reparametrização. Conclui-se que

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

(3)  $\Rightarrow$  (1): Suponhamos primeiro que o aberto  $U$  é conexo e seja  $z_0$  um ponto qualquer de  $U$ . Uma vez que o integral de  $f$  só depende dos extremos do caminho, a expressão

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w)dw$$

define uma função  $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ . Resta-nos ver que  $F$  é holomorfa em  $U$  e que  $F'(z) = f(z)$ . Por definição de derivada temos

$$(8) \quad F'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{z_0}^{z+h} f(w)dw - \int_{z_0}^z f(w)dw}{h}$$

Se  $\gamma$  for um caminho em  $U$  unindo  $z_0$  a  $z$ , podemos tomar para caminho que une  $z_0$  a  $z+h$  a concatenação do caminho  $\gamma$  com o caminho  $\delta(t) = z+th, 0 \leq t \leq 1$

(como  $U$  é aberto, o caminho  $\delta$  terá imagem em  $U$  desde que  $h$  seja suficientemente pequeno). Pela aditividade do integral temos então

$$\int_{z_0}^{z+h} f(w)dw = \int_{z_0}^z f(w)dw + \int_{\delta} f(w)dw = \int_{z_0}^z f(w)dw + \int_0^1 f(z+th)hdt$$

onde na última igualdade aplicámos a definição de integral ao longo de  $\delta$ . Substituindo na expressão (8) obtem-se

$$F'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 f(z+th)hdt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 f(z+th)dt.$$

Uma vez que  $f$  é contínua em  $z$ , quando " $h$  está muito próximo de 0", a função  $t \mapsto f(z+th)$  é "praticamente constante" igual a  $f(z)$  no intervalo  $[0, 1]$ , e o limite em questão é igual a  $\int_0^1 f(z)dt = f(z)$ . Fica como exercício para os alunos interessados, a justificação rigorosa deste último passo.

Vimos assim que o integral indefinido fornece uma primitiva num aberto conexo. O caso de um aberto  $U$  qualquer segue deste caso particular pois uma primitiva em  $U$  é determinada por uma primitiva em cada componente conexa de  $U$ .

□

## 12. TEOREMA DE CAUCHY

Recordemos de Cálculo 2 o conceito de conjunto simplesmente conexo. Um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{C}$  diz-se *simplesmente conexo* se dados dois caminhos

$$\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow U$$

com os mesmos pontos inicial e final (isto é, com  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$  e  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ ), o caminho  $\gamma_1$  pode ser deformado continuamente em  $\gamma_2$  dentro de  $U$  (mantendo os pontos inicial e final fixos).<sup>5</sup>

Num conjunto simplesmente conexo  $U$  há "essencialmente" uma única maneira de ligar por meio de um caminho dois pontos de  $U$  (que possam de facto ser unidos por um caminho) no sentido em que dois quaisquer destes caminhos são equivalentes por deformação. É esta a justificação da terminologia "simplesmente conexo".

Intuitivamente, um subconjunto aberto do plano é simplesmente conexo se "não tem buracos".

### Exemplo 12.1.

- (1)  $U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1+i\}$  não é simplesmente conexo. Um caminho  $\gamma_1$  unindo  $-1$  a  $2+i$  que passe entre os pontos  $0$  e  $1+i$  não pode ser deformado continuamente em  $U$  num caminho  $\gamma_2$  em  $U$  que una  $-1$  a  $2+i$  passando por baixo de  $0$  e  $1+i$ .

<sup>5</sup>Esta ideia de deformação contínua em  $U$  pode ser formalizada da seguinte forma: Existe uma função contínua  $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$  tal que  $H(t, 0) = \gamma_1(t)$ ,  $H(t, 1) = \gamma_2(t)$ ,  $H(a, s) = \gamma_1(a)$  e  $H(b, s) = \gamma_1(b)$ .



- (2)  $U = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$  é simplesmente conexo. É fácil dar uma deformação contínua entre dois caminhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  com os mesmos pontos inicial e final, basta unir os pontos  $\gamma_1(t)$  e  $\gamma_2(t)$  pelo segmento de recta que os une (isto é tomar  $H(t, s) = (1 - s)\gamma_1(t) + s\gamma_2(t)$ ).

O seguinte resultado é o teorema fundamental da Análise Complexa e dá um critério para que uma função complexa seja primitivável que é fácil de verificar.

**Teorema 12.2** (Teorema de Cauchy). *Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto simplesmente conexo. Se  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função holomorfa então  $f$  é primitivável em  $U$ .*

**Nota 12.3.** *Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, uma formulação equivalente do Teorema de Cauchy é: Se  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  é holomorfa e  $U$  é simplesmente conexo, então  $\oint_C f(z)dz = 0$  para toda a curva fechada seccionalmente regular  $C \subset U$ .*

**Exemplo 12.4.**

1. Toda a função inteira (ou seja, holomorfa em  $\mathbb{C}$ ) é primitivável, uma vez que  $\mathbb{C}$  é simplesmente conexo. Por exemplo a função  $e^{z^2}$  é primitivável em  $\mathbb{C}$  (apesar de não ser possível dar uma expressão para a primitiva em termos de funções elementares).
2. Tem-se  $\oint_{|z-2i|=1} \frac{e^z}{z} dz = 0$ . De facto, a curva de integração está contida na região simplesmente conexa  $U = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$  onde a função  $\frac{e^z}{z}$  é holomorfa. O teorema de Cauchy garante portanto que o integral é 0.
3. O Teorema de Cauchy não permite (directamente) formar qualquer conclusão relativamente à existência de primitiva para uma função holomorfa  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  uma vez que o domínio  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  não é simplesmente conexo. Já vimos que  $z \mapsto \frac{1}{z}$  não é primitivável neste domínio mas, por exemplo,  $z \mapsto \frac{1}{z^2}$  é primitivável com primitiva  $z \mapsto -\frac{1}{z}$ .

A principal utilidade do Teorema de Cauchy é que nos permite deformar os caminhos de integração de funções holomorfas dentro do seu domínio de diferenciabilidade, sem alterar o valor do integral. Podemos assim substituir um caminho de integração por outro que dê mais jeito.

**Exemplo 12.5.**

1. Calcular o integral  $\int_C \frac{1}{z} dz$  onde  $C$  é a elipse parametrizada por  $\gamma(t) = 3 \cos t + 2i \sin t$  com  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Não é fácil calcular este integral directamente pela definição. Vamos no entanto ver que o Teorema de Cauchy garante que este integral é igual a  $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ :

O conjunto  $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$  é simplesmente conexo. Dado  $\epsilon > 0$  pequeno, considere-se a curva fechada

$$\beta_\epsilon = C_\epsilon \cup \delta_\epsilon^- \cup \delta_\epsilon^+ \cup -\alpha_\epsilon$$

onde

$$C_\epsilon = C \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| < \epsilon\} \text{ no sentido directo,}$$

$$-\alpha_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| < \epsilon\} \text{ no sentido horário,}$$

são as curvas que se obtêm da elipse e da circunferência respectivamente retirando um pequeno segmento onde intersectam o semi-eixo real positivo, e  $\delta_\epsilon^+, \delta_\epsilon^-$  são segmentos de

recta horizontais contidos nas rectas  $\text{Im } z = \epsilon$  e  $\text{Im } z = -\epsilon$  respectivamente, que unem  $C_\epsilon$  e  $\alpha_\epsilon$ . O segmento  $\delta_\epsilon^+$  é percorrido da esquerda para a direita e o segmento  $\delta_\epsilon^-$  é percorrido no sentido contrário.

A curva fechada  $\beta_\epsilon$  está contida no conjunto simplesmente conexo  $U$  onde  $f(z) = \frac{1}{z}$  é holomorfa, logo, pelo Teorema de Cauchy temos

$$(9) \quad 0 = \int_{\beta_\epsilon} \frac{1}{z} dz = \int_{C_\epsilon} \frac{1}{z} dz + \int_{\delta_\epsilon^-} \frac{1}{z} dz + \int_{-\alpha_\epsilon} \frac{1}{z} dz + \int_{\delta_\epsilon^+} \frac{1}{z} dz$$

para todo o  $\epsilon > 0$ .

Tomando o limite quando  $\epsilon$  tende para 0, temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{1}{z} dz = \oint_C \frac{1}{z} dz$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\alpha_\epsilon} \frac{1}{z} dz = - \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz$$

onde o sinal  $-$  se deve ao facto de  $-\alpha_\epsilon$  ser percorrida no sentido horário,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta_\epsilon^+} \frac{1}{z} dz = \int_\delta \frac{1}{z} dz$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta_\epsilon^-} \frac{1}{z} dz = - \int_\delta \frac{1}{z} dz$$

onde  $\delta$  é o segmento  $[1, 3]$  contido no eixo real e percorrido da esquerda para a direita. As parcelas na soma (9) relativas aos segmentos  $\delta_\epsilon^\pm$  cancelam no limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$  e portanto

$$0 = \oint_C \frac{1}{z} dz - \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz \Rightarrow \oint_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

2. Calcular  $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2-1} dz$ . Podemos escrever

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)$$

logo, pela linearidade do integral, temos

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2-1} dz = \frac{1}{2} \oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1} dz - \frac{1}{2} \oint_{|z|=2} \frac{1}{z+1} dz.$$

Pelo Teorema de Cauchy, podemos deformar os caminhos de integração como no exemplo anterior para concluir que

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1} dz = \oint_{|z-1|=1} \frac{1}{z-1} dz \quad e \quad \oint_{|z|=2} \frac{1}{z+1} dz = \oint_{|z+1|=1} \frac{1}{z+1} dz$$

Os integrais ao longo das circunferências são muito fáceis de calcular, quer usando as parametrizações  $\gamma(t) = \pm 1 + e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , quer fazendo a mudança de variável

$w = z \pm 1$ . Em qualquer caso, os dois têm como resultado

$$\oint_{|w|=1} \frac{1}{w} dw = -2\pi i.$$

Conclui-se finalmente que

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2 - 1} dz = \frac{1}{2} (-2\pi i - (-2\pi i)) = 0.$$

**12.6. Dedução do Teorema de Cauchy no caso em que  $f$  é de classe  $C^1$ .** Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto simplesmente conexo e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa de classe  $C^1$ . Vamos mostrar que se  $C \subset U$  é uma curva fechada seccionalmente regular que limita uma região  $A$  do plano ( $C$  diz-se uma curva de Jordan) então  $\oint_C f(z) dz = 0$ . Daqui se pode concluir que  $\oint_C f(z) dz = 0$  para toda a curva fechada seccionalmente regular  $C \subset U$ , que é a conclusão do Teorema 12.2 (conforme a Nota 12.3).

Recorde-se primeiro o enunciado do Teorema de Green de Cálculo 2: Sendo  $A$  uma região do plano limitada por uma curva seccionalmente regular  $C = \partial A$  e  $(P, Q)$  um campo vectorial de classe  $C^1$  no fecho de  $A$ , tem-se

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_A \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Escrevendo  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  podemos escrever o integral de caminho de  $f$  ao longo da curva  $C$  em termos de integrais de campos vectoriais: se  $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$  com  $t_0 \leq t \leq t_1$  é uma parametrização de  $C$ , então  $\gamma'(t) = \gamma'_1(t) + i\gamma'_2(t)$  logo

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))) (\gamma'_1(t) + i\gamma'_2(t)) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (u(\gamma(t))\gamma'_1(t) - v(\gamma(t))\gamma'_2(t) + i(u(\gamma(t))\gamma'_2(t) + v(\gamma(t))\gamma'_1(t))) dt \\ &= \oint_C u dx - v dy + i \oint_C v dx + u dy \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Green a estes últimos integrais de linha (o que é possível porque estamos a assumir que  $f$  é de classe  $C^1$ ), obtemos

$$\iint_A \left( \frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_A \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy$$

As funções integrandas destes integrais duplos são identicamente nulas pelas equações de Cauchy-Riemann. Conclui-se que  $\oint_C f(z) dz = 0$  conforme pretendido.

## 13. FÓRMULAS INTEGRAIS DE CAUCHY

Uma curva diz-se *simples* se não tem auto-intersecções.

**Definição 13.1.** *Uma curva de Jordan é uma curva seccionalmente regular, fechada e simples no plano.*

**Exemplo 13.2.** *Uma circunferência ou uma elipse são curvas de Jordan. Uma curva em forma de 8 é fechada e seccionalmente regular mas não é uma curva de Jordan porque tem uma auto-intersecção.*

Intuitivamente, uma curva de Jordan é uma curva "parecida com uma circunferência". Uma curva de Jordan separa o plano em duas regiões que se chamam o interior e o exterior da curva. Qualquer curva fechada seccionalmente regular no plano se pode escrever como uma concatenação de curvas de Jordan. Sugere-se que o leitor faça o exercício de decompôr uma curva fechada com várias auto-intersecções à sua escolha em curvas de Jordan. Os integrais de uma função complexa ao longo de curvas fechadas seccionalmente regulares ficam assim determinados pelo valores assumidos pelo integral da função sobre as curvas de Jordan.

**Proposição 13.3** (Fórmula integral de Cauchy). *Seja  $U$  um aberto,  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa,  $C \subset U$  uma curva de Jordan com interior contido em  $U$  e  $z_0$  um ponto no interior de  $C$ . Então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Note-se a seguinte consequência surpreendente do enunciado acima: o valor de  $f$  sobre pontos no interior da curva de Jordan  $C$  é inteiramente determinado pelo valor de  $f$  sobre a curva  $C$ !

*Dem.* Uma vez que  $f(z)$  é diferenciável no interior de  $C$ , a função  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  é diferenciável no interior de  $C$  excepto em  $z_0$ . O Teorema de Cauchy garante então que podemos deformar o caminho de integração  $C$  numa pequena circunferência centrada em  $z_0$ :

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{|z - z_0| = \epsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

sendo o integral da direita independente de  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno (basta que o disco  $\{z: |z - z_0| \leq \epsilon\}$  esteja contido em  $U$ ). Uma parametrização para a circunferência é

$$\gamma(t) = z_0 + \epsilon e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

e substituindo na definição do integral obtém-se

$$\oint_{|z - z_0| = \epsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \epsilon e^{it})}{\epsilon e^{it}} i\epsilon e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i f(z_0 + \epsilon e^{it}) dt.$$

Por hipótese  $f$  é diferenciável em  $z_0$  e portanto é contínua em  $z_0$ . Quando  $\epsilon$  é muito pequeno, a função integranda  $f(z_0 + \epsilon e^{it})$  é "praticamente constante" igual a  $f(z_0)$  e conclui-se que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} i f(z_0 + \epsilon e^{it}) dt = \int_0^{2\pi} i f(z_0) dt = 2\pi i f(z_0)$$

o que conclui a demonstração. Fica como exercício para as alunas interessadas a justificação rigorosa deste último passo da demonstração.  $\square$

**Exemplo 13.4.** Calcular o integral  $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$ . A função  $f(z) = e^z$  é inteira e  $z_0 = 0$  pertence ao interior da circunferência de raio 1. Podemos portanto aplicar directamente a fórmula integral de Cauchy com  $f(z) = e^z$  e  $z_0 = 0$  obtendo

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i.$$

**Proposição 13.5** (Fórmulas integrais de Cauchy). *Seja  $U$  um aberto,  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa,  $C \subset U$  uma curva de Jordan com interior contido em  $U$  e  $z_0$  um ponto no interior de  $C$ . Então  $f$  tem derivadas de todas as ordens em  $z_0$  e, para  $n \geq 1$ ,*

$$(10) \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

**Nota 13.6.** A Fórmula Integral de Cauchy 13.3 é a expressão (10) para  $n = 0$ .

**Nota 13.7.** A Proposição 13.5 diz em particular que uma função holomorfa  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  tem necessariamente derivadas de todas as ordens em  $U$ , em contraste com o que se passa na análise de funções reais de variável real.

**Exemplo 13.8.**

1. Calcular  $\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{(z-i)^3}$ . Podemos aplicar a fórmula de Cauchy com  $f(z) = \operatorname{sen} z$ ,  $z_0 = i$  e  $n = 2$  para concluir que

$$\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{(z-i)^3} = -\frac{2\pi i}{2!} \left( \frac{d}{dz} \right)^2 (\operatorname{sen} z)|_{z=i}$$

onde o sinal se deve ao facto da circunferência ser percorrida no sentido horário. Uma vez que  $(\operatorname{sen} z)'' = -\operatorname{sen} z$  conclui-se que

$$\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{(z-i)^3} = -\pi i \operatorname{sen} i.$$

2. Calcular  $\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{z(z-1)^2} dz$  onde  $C$  é a uma curva fechada em forma de 8 contendo  $z = 0$  e  $z = 1$  em cada uma das circunferências do 8, percorrendo a circunferência da direita no sentido horário e a esquerda no sentido directo.

A função integranda é diferenciável em  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  pelo que o Teorema de Cauchy permite deformar a curva de integração  $C$  em duas circunferências centradas em 0 e 1:

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{z(z-1)^2} dz = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen} z}{z(z-1)^2} dz + \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen} z}{z(z-1)^2} dz$$

Aplicando a fórmula integral de Cauchy com  $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z-1)^2}$  (que é diferenciável no interior da circunferência de raio  $\frac{1}{2}$  centrada em 0) e  $z_0 = 0$  obtemos

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen} z}{z(z-1)^2} dz = 2\pi i \left( \frac{\operatorname{sen} z}{(z-1)^2} \right)_{z=0} = 0.$$

Aplicando a fórmula integral de Cauchy para a derivada de primeira ordem com  $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ ,  $z_0 = 1$ , obtemos

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen} z}{z(z-1)^2} dz = -2\pi i \frac{d}{dz} \left( \frac{\operatorname{sen} z}{z} \right)_{z=1}$$

onde o sinal se deve ao facto da circunferência ser percorrida no sentido horário. Uma vez que

$$\left( \frac{\operatorname{sen} z}{z} \right)' = \frac{z \cos z - \operatorname{sen} z}{z^2}$$

tem-se

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen} z}{z(z-1)^2} dz = -2\pi i (\cos 1 - \operatorname{sen} 1)$$

e portanto

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{z(z-1)^2} dz = -2\pi i (\cos 1 - \operatorname{sen} 1).$$

*Dem. da Proposição 13.5.* As expressões para as derivadas  $f^{(n)}(z_0)$  obtêm-se derivando a expressão

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

De facto, tem-se por definição

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

e, uma vez que para  $h$  suficientemente pequeno, o ponto  $z_0 + h$  pertence também ao interior da curva  $C$ , aplicando a fórmula de Cauchy para calcular o valor da função em  $z_0 + h$  obtemos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - (z_0 + h)} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \left( \frac{\frac{1}{z - (z_0 + h)} - \frac{1}{z - z_0}}{h} \right) dz \end{aligned}$$

A razão incremental  $\frac{\frac{1}{z - (z_0 + h)} - \frac{1}{z - z_0}}{h}$  converge (por definição de derivada) para

$$\frac{d}{dz_0} \left( \frac{1}{z - z_0} \right) = \frac{1}{(z - z_0)^2}.$$

Pode demonstrar-se que o limite troca com o sinal de integral (exercício para os alunos interessados) e portanto conclui-se que

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

As fórmulas para as derivadas de ordem superior obtêm-se da mesma forma derivando sucessivamente. Por exemplo

$$\begin{aligned} f''(z_0) &= \frac{d}{dz_0} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \frac{d}{dz_0} \left( \frac{1}{(z - z_0)^2} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \frac{2}{(z - z_0)^3} dz \\ &= \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz. \end{aligned}$$

Da próxima vez que se deriva, o expoente 3 do denominador aumenta 1 e o 3 passa para fora a multiplicar, justificando o 3! na fórmula para a terceira derivada, etc...  $\square$

#### 14. APLICAÇÕES DAS FÓRMULAS INTEGRAIS DE CAUCHY

**Exemplo 14.1.** Calcular  $\oint_C \frac{e^{2\pi iz}}{z^2 - 1} dz$  para toda a curva de Jordan  $C$  contida no domínio de diferenciabilidade.

Pelo Teorema de Cauchy, podemos deformar  $C$  dentro do domínio de diferenciabilidade de  $\frac{e^{2\pi iz}}{z^2 - 1}$ , que é  $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ , sem alterar o valor do integral. Há apenas quatro casos a considerar:

(i)  $C$  não contém 1 nem  $-1$  no seu interior: Então  $C$  pode ser deformada num ponto (isto é num caminho constante) e portanto

$$\oint_C \frac{e^{2\pi iz}}{z^2 - 1} dz = 0.$$

(ii)  $C$  contém  $-1$  no interior mas não 1: Então  $C$  pode ser deformada na circunferência  $|z + 1| = 1$  e portanto

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^{2\pi iz}}{z^2 - 1} dz &= \oint_{|z+1|=1} \frac{e^{2\pi iz}}{z^2 - 1} dz \\ &= \oint_{|z+1|=1} \frac{\frac{e^{2\pi iz}}{z-1}}{z+1} dz \\ &= 2\pi i \left( \frac{e^{2\pi iz}}{z-1} \right)_{z=-1} \\ &= -\pi i. \end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade aplicámos a fórmula integral de Cauchy. Se  $C$  for percorrida no sentido horário, o valor do integral é  $\pi i$ .

(iii)  $C$  contém 1 mas não  $-1$  no seu interior: Então  $C$  pode ser deformada na circunferência  $|z - 1| = 1$  e portanto

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^{2\pi iz}}{z^2 - 1} dz &= \oint_{|z-1|=1} \frac{e^{2\pi iz}}{z - 1} dz \\ &= 2\pi i \left( \frac{e^{2\pi iz}}{z + 1} \right)_{z=1} = \pi i. \end{aligned}$$

Se  $C$  for percorrida no sentido horário, o valor do integral é  $-\pi i$ .

(iv)  $C$  contém 1 e  $-1$  no interior: Então  $C$  pode ser deformada na união das circunferências dos pontos (ii) e (iii). Isto é

$$\oint_C \frac{e^{2\pi iz}}{z^2 - 1} dz = \oint_{|z+1|=1} \frac{e^{2\pi iz}}{z^2 - 1} dz + \oint_{|z-1|=1} \frac{e^{2\pi iz}}{z^2 - 1} dz = -\pi i + \pi i = 0.$$

Conclui-se que os valores possíveis para o integral  $\oint_C \frac{e^{2\pi iz}}{z^2 - 1} dz$  são 0 e  $\pm\pi i$ .

Uma vez que podemos escrever qualquer curva seccionalmente regular fechada como uma concatenação de curvas de Jordan, conclui-se que os integrais ao longo das circunferências  $|z \pm 1| = 1$  calculados em (ii) e (iii) determinam completamente os integrais  $\oint_C \frac{e^{2\pi iz}}{z^2 - 1} dz$  para qualquer curva fechada  $C$  em  $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ . Os valores possíveis são  $k\pi i$  com  $k \in \mathbb{Z}$ .

Como conseguimos calcular o integral ao longo de qualquer curva fechada, podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo 11.3 para decidir se a função é primitivável. Por exemplo, a função  $\frac{e^{2\pi iz}}{z^2 - 1}$  é primitivável em  $U = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . De facto, o integral ao longo de qualquer curva de Jordan (e portanto ao longo de qualquer curva fechada) em  $U$  é nula pelos cálculos efectuados anteriormente, pois uma tal curva ou contém ambos os pontos  $-1$  e  $1$  no seu interior, ou não contém nenhum deles.

O método ilustrado no exemplo anterior permite calcular  $\oint_C \frac{f(z)}{p(z)} dz$  quando  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  é holomorfa com  $U$  simplesmente conexo,  $p(z)$  é um polinómio e  $C$  é uma curva fechada seccionalmente regular contida em  $U$ .

Concluimos a discussão do Teorema e fórmulas integrais de Cauchy com a apresentação de algumas consequências importantes. A primeira é uma caracterização das funções holomorfas em termos do integral de caminho complexo.

**Teorema 14.2** (Teorema de Morera). *Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua. Se  $\oint_C f(z) dz = 0$  para toda a curva fechada seccionalmente regular contida em  $U$ , então  $f$  é holomorfa em  $U$ .*

*Dem.* O Teorema Fundamental do Cálculo 11.3 diz-nos que  $f$  é primitivável. Se  $F(z)$  é uma primitiva,  $F$  é holomorfa em  $U$  e portanto, pelas fórmulas integrais de Cauchy (Proposição 13.5)  $F$  tem derivadas de todas as ordens em  $U$ . Mas então o mesmo é verdade para a sua derivada  $f$ . Em particular,  $f$  é holomorfa.  $\square$

Segue-se uma propriedade surpreendente das funções inteiras (funções holomorfas em todo o plano complexo). Uma função  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  diz-se *limitada* se existe  $M > 0$  tal que  $|f(z)| \leq M$  para todo o  $z \in U$ .



**Teorema 14.3** (Teorema de Liouville). *Uma função inteira limitada é constante*

O Teorema anterior é uma consequência imediata da fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada. A demonstração fica como exercício.

O seguinte Teorema tem muitas aplicações em Álgebra. Foi usado em Álgebra Linear para garantir a existência de valores e vectores próprios para uma matriz quadrada (os valores próprios são as raízes do polinómio característico).

**Teorema 14.4** (Teorema Fundamental da Álgebra). *Todo o polinómio complexo não constante tem uma raiz complexa.*

*Dem.* Suponhamos que  $p(z)$  é um polinómio não constante mas que  $p(z) \neq 0$  para todo o  $z \in \mathbb{C}$ . Então a função  $f(z) = \frac{1}{p(z)}$  é inteira (e em particular é contínua). Uma vez que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{|p(z)|} = 0$$

conclui-se do Teorema de Weierstrass (de Cálculo 2) que  $|f(z)|$  tem máximo em  $\mathbb{C}$ . Mas então  $f$  é limitada e portanto, pelo Teorema de Liouville, é constante. Isto contradiz a hipótese de  $p(z)$  não ser constante e conclui a demonstração.  $\square$

**Nota 14.5.** *Por indução prova-se facilmente a partir do Teorema 14.4 que um polinómio complexo de grau  $n$  tem exactamente  $n$  raízes complexas (quando contadas com as suas multiplicidades).*

## 15. SÉRIES NUMÉRICAS

Uma *série* é uma sucessão da forma

$$(11) \quad \sum_{k=1}^N z_k \quad \text{com } z_k \text{ uma sucessão de números complexos.}$$

É costume denotar uma série pela expressão

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

e dizer que esta *converge* se o limite de (11) existe, o que se abrevia por  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k < \infty$ . A sucessão  $z_k$  diz-se o *termo geral* da série. Escrevendo

$$z_k = a_k + ib_k \quad \text{com } a_k, b_k \in \mathbb{R}$$

e tendo em conta a secção 3.4, vemos que

$$\sum z_k < \infty \Leftrightarrow \sum a_k < \infty \text{ e } \sum b_k < \infty.$$

Recorda-se que a convergência de uma série é determinada pelo comportamento do termo geral quando  $k$  tende para infinito (isto é, não depende do comportamento inicial da sucessão  $z_k$ ). Em particular a natureza das séries  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  e  $\sum_{k=10000}^{\infty} z_k$  é a mesma e, consequentemente, quando se pretende apenas analisar a convergência ou não de uma série

não é necessário especificar o termo inicial (isto é qual é o valor de  $k$  onde se começa a somar).

**Proposição 15.1** (Propriedades das séries). *Seja  $(z_k)$  uma sucessão de números complexos.*

1. Se  $\sum z_k < \infty$  então  $z_k \rightarrow 0$  (mas não reciprocamente! Por exemplo  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ ).
2. Se  $\sum |z_k| < \infty$  então  $\sum z_k < \infty$  (diz-se que  $\sum z_k$  converge absolutamente).
3. **Crítério da comparação.** Se  $|z_k| \leq a_k$  e  $\sum a_k < \infty$ , então  $\sum z_k$  converge absolutamente.
4. Para  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tem-se  $\sum_k \frac{1}{k^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \alpha > 1$ .
5. Para  $r \in \mathbb{C}$ , tem-se  $\sum_k r^k < \infty \Leftrightarrow |r| < 1$ .

*Dem.*

1. Se  $S_n = \sum_{k=1}^n z_k$  é a sucessão das somas parciais então  $z_k = S_k - S_{k-1}$ . Por hipótese, a sucessão  $S_k$  é convergente. Mas então a sucessão  $S_{k-1}$  é também convergente com o mesmo limite, e portanto  $z_k$  converge sendo o limite 0.
2. É uma consequência da desigualdade triangular. Se  $\sum |z_k| < \infty$ , a sucessão das somas parciais da série  $\sum z_k$  é uma sucessão de Cauchy e portanto converge. Alternativamente, escrevendo  $z_k = a_k + ib_k$  tem-se  $|a_k| \leq |z_k|$  e  $|b_k| \leq |z_k|$  logo  $\sum |a_k| < \infty$  e  $\sum |b_k| < \infty$ . Como as séries  $\sum a_k$  e  $\sum b_k$  convergem, o mesmo sucede com  $\sum z_k$ .
3. De facto a sucessão das somas parciais  $\sum_{k=1}^n |z_k|$  é crescente e limitada por  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , logo é convergente.
4. Isto foi provado em Cálculo 1 por comparação das séries com os integrais das funções  $\frac{1}{x^\alpha}$  em  $[1, \infty[$ . Para se lembrarem deste resultado, basta que se lembrem que o expoente que separa a convergência da não convergência é  $\alpha = 1$ , pois quanto maior  $\alpha$  mais pequeno é  $\frac{1}{n^\alpha}$ . Se a série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge para um valor de  $\alpha$  tem necessariamente que convergir para valores de  $\alpha$  maiores pelo critério da comparação.
5. Para qualquer  $r \in \mathbb{C}$  e  $N \geq 1$  tem-se

$$\begin{aligned} (1 + r + \dots + r^{N-1} + r^N)(1 - r) &= (1 + r + \dots + r^{N-1} + r^N) - (r + r^2 + \dots + r^N + r^{N+1}) \\ &= 1 - r^{N+1} \end{aligned}$$

logo, para  $r \neq 1$  tem-se

$$\sum_{k=0}^N r^k = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}.$$

Para  $r \neq 1$ , a sucessão das somas parciais converge sse  $|r| < 1$  (e nesse caso o limite é  $\frac{1}{1-r}$ ). Para  $r = 1$ , claramente  $\sum r^n$  não converge. □

**Nota 15.2.** *Note-se que o critério da comparação pode também ser utilizado para provar a divergência de uma série de termos positivos. De facto, se  $0 \leq b_k \leq a_k$  e  $\sum b_k = +\infty$  então claramente  $\sum a_k = +\infty$  ou entraríamos em contradição com o critério da comparação.*

**Exemplo 15.3.** 1. A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$  converge absolutamente. De facto,

$$\left| \frac{e^{in}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$$

que converge pela Proposição 15.1(4).

2. Dado  $z \in \mathbb{C}$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^4}$  converge sse  $|z| \leq 1$ . De facto, se  $|z| > 1$ , tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^n}{n^4} = +\infty$$

e portanto segue da Proposição 15.1(1) que a série não converge. Por outro lado, se  $|z| \leq 1$  tem-se

$$\left| \frac{z^n}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4}.$$

Como  $\sum \frac{1}{n^4} < \infty$  pela Proposição 15.1(4), conclui-se do critério da comparação que a série  $\sum \frac{z^n}{n^4}$  converge absolutamente.

Como recordámos na Proposição 15.1(1), não é suficiente para que uma série  $\sum z_n$  convirja que o seu termo geral  $z_n$  tenda para 0. A série harmónica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  é um exemplo de uma série que diverge apesar de o termo geral tender para 0. O que é verdade, para séries de termos positivos é que uma série converge se o termo geral "tende para zero suficientemente depressa".

Esta última afirmação não vale no entanto para séries cujos termos não são necessariamente positivos. Recorde-se que a série harmónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge apesar de tender para zero devagar. É o exemplo básico de uma série que é convergente mas não absolutamente convergente. As somas parciais  $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n}$  vão-se deslocando alternadamente para a esquerda e direita, movendo-se cada vez menos e temos assim

$$(S_1 = -1) \leq (S_3 = -\frac{5}{6}) \leq S_5 \leq \dots \leq S_6 \leq (S_4 = -\frac{7}{12}) \leq (S_2 = -\frac{1}{2})$$

Devido à alternância do sinal, e ao facto de o termo geral decrescer em módulo temos que, para todo o  $n \geq k$ , a soma parcial  $S_n$  pertence ao intervalo com extremos  $S_k$  e  $S_{k-1}$ . Uma vez que o comprimento deste intervalo tende para 0 com  $k$ , a sucessão das somas parciais é uma sucessão de Cauchy e portanto converge.

**Proposição 15.4** (Mais propriedades das séries).

6. Seja  $x_n$  uma sucessão decrescente de termos positivos. Então  $\sum_n (-1)^n x_n$  converge sse  $\lim x_n = 0$ .
7. **Critério da razão.** Seja  $z_n$  uma sucessão de números complexos tal que  $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}$  converge. Se  $\lim \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < 1$ , então  $\sum_n |z_n| < \infty$ .

*Dem.*

- (1) O argumento é exactamente o mesmo que para a série harmónica alternada.
- (2) Suponhamos que o limite de  $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}$  é  $r < 1$ . Então para  $n$  grande tem-se  $|z_{n+1}| \sim r|z_n|$ ,  $|z_{n+2}| \sim r|z_{n+1}| \sim r^2|z_n|$  e, mais geralmente,  $|z_{n+k}| \sim r^k|z_n|$  para todo o  $k$ . Mas então, para  $n$  grande,  $|z_n|$  é aproximadamente uma progressão geométrica de razão  $r < 1$  e portanto a série converge. Fica como exercício para os alunos interessados a formalização deste argumento usando o critério da comparação. □

**Exemplo 15.5.** *Determinar a natureza das seguintes séries:*

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \sqrt{n}}{(2+4i)^n}$ . Uma vez que

$$\lim \frac{\left| \frac{(n+1)^3 + \sqrt{n+1}}{(2+4i)^{n+1}} \right|}{\left| \frac{n^3 + \sqrt{n}}{(2+4i)^n} \right|} = \lim \left| \frac{n^3 + \sqrt{n}}{(n+1)^3 + \sqrt{n+1}} \right| \frac{1}{|2+4i|} = \frac{1}{|2+4i|} = \frac{1}{\sqrt{20}} < 1$$

logo a série converge absolutamente pelo critério da razão.

- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n^2+n)}$ . Esta sucessão tem termos positivos e claramente tende para 0 devagar pelo que não irá convergir. Por exemplo, temos

$$\frac{1}{\log(n^2+n)} \geq \frac{1}{n}$$

para  $n$  grande (basta  $n \geq 2$  na realidade). Uma vez que  $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ , conclui-se do critério da comparação que a série diverge.

## 16. SÉRIES DE POTÊNCIAS

**Definição 16.1.** *Uma série de potências é uma expressão da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad \text{com } a_n \in \mathbb{C} \text{ e } z_0 \in \mathbb{C}$$

O raio de convergência da série de potências é

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty].$$

Recorde-se de Cálculo 1, que se  $x_n$  é uma sucessão de números reais,  $\limsup x_n$  denota o maior dos limites de subsucessões convergentes de  $x_n$ .

**Exemplo 16.2.**

- (1) Se  $x_n$  converge, então  $\limsup x_n = \lim x_n$ .
- (2) A sucessão  $x_n = (-1)^n$  não converge. Tem no entanto subsucessões convergentes para  $-1$  e  $1$ , pelo que  $\limsup(-1)^n = 1$ .

A fórmula que define o raio de convergência não é muito prática. Sempre que possível é melhor calcular o raio de convergência usando a fórmula seguinte.

**Proposição 16.3.** *Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  uma série de potências. Se a sucessão  $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$  converge, o seu limite coincide com o raio de convergência da série de potências.*

**Exemplo 16.4.** *Determinar o raio de convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + in^2} z^n$ .*

Uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + in^2}{(n+1)^3 + i(n+1)^2} = 1$$

conclui-se que o raio de convergência é 1.

Para calcular raios de convergência de séries de potências é por vezes necessário calcular limites de sucessões da forma  $\sqrt[n]{x_n}$ . Para o fazer é conveniente escrever essa expressão em forma de exponencial:  $\sqrt[n]{x_n} = (x_n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log(x_n)}$ . Por exemplo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\log 3}{n}} = e^0 = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\log n}{n}} = e^0 = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2e^{\frac{\log n^2}{n}} = 2e^0 = 2.$$

*Ideia da dem. da Prop. 16.3.* Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$  então para  $n$  grande,  $|a_{n+1}| \sim \frac{1}{R}|a_n|$  e portanto  $|a_n|$  tem a natureza de uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{R}$ . Mais precisamente  $|a_{n+k}| \sim \left(\frac{1}{R}\right)^k |a_n|$  para todo o  $k \geq 0$ . Uma vez que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n+k]{\left(\frac{1}{R}\right)^k |a_n|} = \frac{1}{R}$$

conclui-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$  pelo que o raio de convergência da série de potências em questão é  $R$ .  $\square$

**Exemplo 16.5.** *Determinar o raio de convergência das seguintes séries de potências.*

(1)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{\sqrt{n+1}} (z-3)^n$ . Tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(1+i)^n}{\sqrt{n+1}} \right|}{\left| \frac{(1+i)^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|1+i|} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

logo o raio de convergência é  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

(2)  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z-i)^{2n}$ . A série em questão é

$$1 + 2(z-i)^2 + 2^2(z-i)^4 + 2^3(z-i)^6 + \dots$$

Na Definição 16.1,  $a_n$  é o coeficiente da potência de  $(z - z_0)$  de expoente  $n$ , logo para esta série temos

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 2^2, \dots$$

ou seja

$$a_n = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ é par} \\ 0 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

A sucessão  $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$  não está definida (os termos pares seriam uma divisão por 0) pelo que não podemos aplicar o critério da Proposição 16.3. Temos portanto que aplicar a fórmula que define o raio de convergência na Definição 16.1:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{2^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ 0 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

e portanto

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{2}.$$

Conclui-se que o raio de convergência da série é  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

## 17. SÉRIES DE TAYLOR

A razão porque falamos de séries de potências é que estas dão uma nova caracterização das funções holomorfas que segue dos seguintes dois resultados.

**Proposição 17.1.** *A expressão  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  define uma função holomorfa em  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ , onde  $R$  denota o raio de convergência da série de potências.*

*Ideia da demonstração.* A partir da definição de raio de convergência vê-se que, para  $|z - z_0| < R$ , a série é dominada por uma série geométrica de razão  $< 1$  e portanto converge. Um pouco mais detalhadamente, seja  $|z - z_0| = r < R$ . Como  $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ , se  $T$  for um número qualquer maior que  $\frac{1}{R}$ , para  $n$  suficientemente grande temos  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq T$ . Escolhendo  $R'$  tal que  $r < R' < R$  e tomando  $T = \frac{1}{R'}$  temos então

$$|a_n| \leq \frac{1}{(R')^n} \Rightarrow |a_n(z - z_0)^n| \leq \left(\frac{r}{R'}\right)^n$$

para  $n$  suficientemente grande. Uma vez que  $\frac{r}{R'} < 1$ , do critério da comparação segue que a série  $\sum_n a_n(z - z_0)^n$  converge absolutamente.

Para ver que a função  $f(z)$  definida pela série em  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$  é holomorfa, pelo Teorema de Morera 14.2 basta ver que  $f$  é contínua e que  $\oint_C f(z) dz = 0$  para toda a curva fechada seccionalmente regular contida no disco em questão. Mas

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \oint_C (z - z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0 = 0.$$

A continuidade de  $f(z)$  e a troca da série com o integral requer justificação, que envolve a noção de convergência uniforme.  $\square$

**Nota 17.2.** *Quando  $|z - z_0| = R$ , a série de potências pode convergir ou não, dependendo dos coeficientes  $a_n$ . Para  $|z - z_0| > R$ , é fácil ver que o termo geral da série não converge para 0 e portanto a série diverge.*

Reciprocamente, toda a função holomorfa pode ser desenvolvida em série de potências em torno de cada ponto do seu domínio.

**Teorema 17.3** (Teorema de Taylor). *Se  $f$  é uma função holomorfa no disco  $\{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\}$ , então existem coeficientes  $a_n \in \mathbb{C}$  únicos tais que*

$$(12) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ para } |z - z_0| < r.$$

Além disso, os coeficientes são dados pela expressão

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

O desenvolvimento (12) chama-se o *desenvolvimento em série de Taylor de  $f(z)$  em torno de  $z = z_0$* . Quando  $z_0 = 0$  chama-se também o *desenvolvimento de MacLaurin de  $f(z)$* . A unicidade dos coeficientes é importante e é frequentemente utilizada para calcular expansões em série de Taylor como iremos ver nos exemplos que se seguem.

**Exemplo 17.4.**

- (1) *Seja  $f(z) = e^z$  a exponencial complexa. Esta função é inteira, logo podemos tomar  $r = +\infty$  no enunciado do Teorema de Taylor. Claramente  $f^{(n)}(z) = e^z$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Aplicando o Teorema em  $z_0 = 0$ , temos  $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$  e obtemos o desenvolvimento*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

- (2) *Seja  $f(z) = \frac{1}{1-z}$ . A função  $f$  é holomorfa em  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  e portanto é holomorfa em  $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ . O Teorema de Taylor diz que existe uma única escolha de coeficientes  $a_n \in \mathbb{C}$  tais que*

$$(13) \quad f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{para } |z| < 1.$$

O Teorema dá também uma fórmula para calcular  $a_n$  mas em geral não é prático utilizá-la. Recordando que

$$(14) \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{para } |z| < 1,$$

pela fórmula para a soma de uma série geométrica, e comparando (13) e (14), a unicidade dos coeficientes  $a_n$  no desenvolvimento de Taylor garante-nos que  $a_n = 1$ .

A fórmula de Taylor pode agora ser usada para calcular as derivadas de  $f(z)$  em  $z = 0$ . De facto

$$1 = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Leftrightarrow f^{(n)}(0) = n!$$

Por exemplo  $f^{(1000)}(0) = 1000!$ .

**Nota 17.5.** O Teorema de Taylor 17.3 permite achar o raio de convergência do desenvolvimento de Taylor de uma função  $f(z)$  em  $z_0$  sem fazer qualquer cálculo: é o raio do maior disco centrado em  $z_0$  ao qual  $f(z)$  pode ser prolongada como uma função holomorfa. De facto, seja  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  a série de Taylor de  $f$  em  $z_0$  e  $R$  o respectivo raio de convergência. Se  $f(z)$  pode ser prolongada como função holomorfa a  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$  então o Teorema de Taylor diz que  $S(z)$  converge nesse disco e portanto  $R \geq r$ . Reciprocamente, a Proposição 17.1 garante que  $S(z)$  é holomorfa no disco  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ . Como  $S(z)$  coincide com  $f(z)$  perto de  $z_0$ , a função  $f(z)$  pode ser prolongada à função holomorfa  $S(z)$  no disco de raio  $R$  centrado em  $z_0$ .

**Exemplo 17.6.** Achar os desenvolvimentos de Taylor em torno do ponto  $z_0$  indicado:

(1)  $e^{z^2}$  em  $z_0 = 0$ . Substituindo  $z$  por  $z^2$  na expansão do Exemplo 17.4 (1) temos

$$\begin{aligned} e^{z^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n!} \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

A unicidade do desenvolvimento de Taylor garante que este é o desenvolvimento pretendido.

(2)  $\frac{1}{2+z^3}$  em  $z_0 = 0$ . Podemos obter este desenvolvimento por substituição no do Exemplo 17.4(2) (isto é, usando a fórmula para a soma de uma série geométrica):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+z^3} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z^3}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z^3}{2}\right)^n \text{ para } \left|-\frac{z^3}{2}\right| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^{3n} \text{ para } |z| < \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

(3) Os desenvolvimentos de MacLaurin das funções trigonométricas  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\sinh z$  e  $\cosh z$  são os já familiares de Cálculo 1. Podem ser obtidos aplicando a fórmula de Taylor para os coeficientes da série (uma vez que a fórmula para a derivada de ordem  $n$  de uma função trigonométrica é fácil de achar) ou então a partir do desenvolvimento da exponencial e das fórmulas que definem as funções trigonométricas complexas. O resultado é

$$\begin{aligned} \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C} \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$



$$(15) \quad \begin{aligned} \sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C} \\ \cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Vejamos por exemplo a dedução do desenvolvimento de  $\cosh z$  a partir do de  $e^z$ :

$$\begin{aligned} \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Na última expressão os termos correspondentes às potências de  $z$  com expoente ímpar cancelam, obtendo-se a expressão (15). É um bom exercício fazer o cálculo análogo para  $\sin z$  ou  $\cos z$ .

(4)  $\frac{1}{1+z}$  em torno de  $z_0 = i$ . Pretende-se uma expressão para a função  $\frac{1}{1+z}$  da forma

$$a_0 + a_1(z-i) + a_2(z-i)^2 + \dots$$

Podemos escrever a função em termos de  $(z-i)$  fazendo  $\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+i+(z-i)}$  e aplicar a fórmula para a soma de uma série geométrica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-i}{1+i}} \\ &= \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{z-i}{1+i} \right)^n, \quad \left| \frac{z-i}{1+i} \right| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} (z-i)^n, \quad |z-i| < |1+i| = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Além de manipulações algébricas simples e substituições nos desenvolvimentos conhecidos para a função exponencial, funções trigonométricas e a soma da série geométrica, um outro método para obter desenvolvimentos de Taylor é a derivação e integração de séries termo a termo.

**Proposição 17.7.** *As séries de potências podem ser derivadas e integradas termo a termo.*

*Dem.* Requer o recurso à noção de convergência uniforme. □

A proposição anterior diz (no caso da operação de derivação) que

$$\frac{d}{dz} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} (a_n (z-z_0)^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n (z-z_0)^{n-1} \quad \text{para } |z-z_0| < R$$

onde  $R$  é o raio de convergência da série de potências que estamos a derivar. Recomenda-se o exercício de verificar directamente que o raio de convergência de uma série de potências e da série das derivadas coincide.

**Exemplo 17.8.** *Desenvolver as seguintes funções em série de MacLaurin.*

(1)  $\frac{1}{(1-z)^2}$ . *Tem-se*

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1-z} \right) \\ &= \frac{d}{dz} \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \text{ para } |z| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1}, \quad |z| < 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

(2)  $\log(1+z)$ , onde  $\log$  denota a função logaritmo definida pela escolha do argumento principal. A função  $\log(1+z)$  é diferenciável em  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, -1]$  e nesse domínio é o integral indefinido de  $\frac{1}{1+z}$ :

$$\log(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1+w} dw$$

(para fixar ideias pode tomar-se para caminho de integração o segmento de recta que une 0 a  $z$ ). Concluimos que

$$\begin{aligned} \log(1+z) &= \int_0^z \frac{1}{1+w} \\ &= \int_0^z \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n \right) dw \text{ para } |z| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^z w^n dw, \quad |z| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

*Demonstração do Teorema de Taylor 17.3.* Seja  $f$  uma função holomorfa na região  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ . Dado  $z$  nesta região podemos escolher  $s$  tal que  $|z - z_0| < s < r$  e aplicando a fórmula de Cauchy à circunferência de raio  $s$  e ao ponto  $z$  (que pertence ao seu interior) temos

$$(16) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=s} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

A função  $\frac{1}{w-z}$  pode ser desenvolvida em série de potências de  $(z - z_0)$  como fizemos nos exemplos acima

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}},$$

onde usámos que  $\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| < 1$ . Substituindo na fórmula de Cauchy (16) temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=s} \left( \sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \right) dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=s} \left( f(w) \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \right) dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=s} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n. \end{aligned}$$

onde na última passagem usámos as fórmulas integrais de Cauchy. A troca da série com o sinal de integral na segunda passagem do cálculo anterior requer justificação, que envolve a noção de convergência uniforme.  $\square$

## 18. SÉRIES DE LAURENT E CLASSIFICAÇÃO DE SINGULARIDADES ISOLADAS

**Definição 18.1.** *Uma série de Laurent é uma série da forma*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

onde  $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$ .

Uma série de Laurent é portanto uma expressão do tipo

$$\dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

que deve ser encarada como a soma de duas séries de potências:

$$\text{Uma série de potências de } (z-z_0): \quad a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

$$\text{Uma série de potências de } \frac{1}{z-z_0}: \quad \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots$$

A primeira converge numa região da forma  $|z-z_0| < R$  (onde  $R$  é o raio de convergência) e a segunda converge numa região da forma  $\left| \frac{1}{z-z_0} \right| < r' \Leftrightarrow |z-z_0| > \frac{1}{r'} = r$  (onde novamente  $r'$  é dado pela fórmula para o raio de convergência de uma série de potências). A série de potências com expoente negativo chama-se a *parte singular* da série de Laurent.

Conclui-se que uma série de Laurent converge absolutamente numa região da forma

$$\{z \in \mathbb{C}: r < |z - z_0| < R\}$$

(que se chama um *ânulo*) e nessa região define uma função holomorfa (pela Proposição 17.1). Reciprocamente temos o seguinte análogo do Teorema de Taylor.

**Teorema 18.2** (Teorema de Laurent). *Seja  $f$  uma função holomorfa no conjunto  $\{z \in \mathbb{C}: r < |z - z_0| < R\}$  onde  $0 \leq r < R \leq +\infty$ . Então existem coeficientes  $a_n \in \mathbb{C}$  únicos tais que*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{para } r < |z - z_0| < R.$$

Além disso

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=s} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Os desenvolvimentos em série de Laurent são achados da mesma forma que os desenvolvimentos de Taylor, usando a unicidade dos desenvolvimentos e a comparação com desenvolvimentos em séries de potências conhecidos.

**Exemplo 18.3.** *Determinar os desenvolvimentos de Laurent nas regiões indicadas.*

- (1)  $\frac{1}{1-z}$  na região  $1 < |z| < +\infty$ . Vamos deduzir a expansão a partir da fórmula para a soma de uma série geométrica, notando que  $|z| > 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} \\ &= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad \text{para } \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots, \quad \text{para } |z| > 1. \end{aligned}$$

- (2)  $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$  na região  $1 < |z| < 2$ . Podemos decompor esta função em frações simples:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

e basta agora achar um desenvolvimento em série de potências de  $z$  para cada uma das parcelas que seja válido na região pretendida. Para a primeira parcela serve o desenvolvimento de MacLaurin que é válido para  $|z| < 2$ :

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad |z| < 2$$

enquanto que um desenvolvimento de  $-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z}$  válido para  $|z| > 1$  foi achado no exemplo anterior. Conclui-se que

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{z^{n+1}}, \text{ para } 1 < |z| < 2.$$

(3)  $\text{sen } \frac{1}{z}$  em  $0 < |z| < +\infty$ . Este desenvolvimento pode ser obtido directamente substituindo no desenvolvimento de MacLaurin de  $\text{sen } z$ :

$$\text{sen } \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}, \text{ para } z \neq 0.$$

As séries de Laurent são utilizadas na análise de certos pontos de não diferenciabilidade de uma função complexa, que é necessária para o cálculo de alguns integrais de caminho (como veremos nas próximas aulas).

**Definição 18.4.** Uma função complexa  $f(z)$  tem uma singularidade isolada em  $z_0$  se existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f$  é holomorfa em  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$ .

Assim, uma função tem uma singularidade isolada em  $z_0$  se é diferenciável em todos os pontos próximos de  $z_0$ , exceptuando o próprio ponto. As funções do Exemplo 18.3 têm, respectivamente, singularidades isoladas em 1, em 1 e 2, e em 0.

**Definição 18.5.** Seja  $z_0$  uma singularidade isolada de  $f$  e  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  a expansão de Laurent válida em  $0 < |z - z_0| < \epsilon$ . Então  $z_0$  diz-se

- uma singularidade removível se  $a_n = 0$  para  $n < 0$ , isto é se a expansão de Laurent é da forma

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

- um pólo de ordem  $k$  (para  $k \geq 1$ ) se  $a_n = 0$  para  $n < -k$  e  $a_{-k} \neq 0$ , isto é, se a expansão de Laurent é da forma

$$\frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \quad \text{com } a_{-k} \neq 0.$$

- uma singularidade essencial caso contrário, isto é se há infinitos valores de  $n < 0$  para os quais  $a_n \neq 0$ .

O resíduo de  $f$  em  $z_0$  é o coeficiente  $a_{-1}$  de  $\frac{1}{z-z_0}$  na expansão de Laurent:

$$\text{Res}(f(z), z_0) = a_{-1}.$$

Se  $z_0$  é uma singularidade removível, a série de Laurent é na realidade uma série de Taylor e, portanto, define uma função holomorfa num disco centrado em  $z_0$ . A função  $f(z)$  pode assim ser prolongada a  $z_0$  como uma função holomorfa, o que justifica a terminologia para este tipo de singularidade.

A definição anterior estabelece uma hierarquia entre as singularidades isoladas. Do melhor caso para o pior temos: as singularidades removíveis não são verdadeiras singularidades - a função só aparentemente não é holomorfa no ponto; num pólo, a parte singular da série

de Laurent tem apenas um número finito de termos; finalmente, numa singularidade essencial, a série de Laurent contém infinitos termos que tendem para  $\infty$  quando  $z$  tende para  $z_0$ .

**Exemplo 18.6.** *Classificar as singularidades das seguintes funções e calcular os respectivos resíduos.*

- (1) A função  $\text{sen } \frac{1}{z}$  tem uma singularidade isolada em 0. Tendo em conta o desenvolvimento de Laurent do Exemplo 18.3(3)

$$\text{sen } \frac{1}{z} = \cdots + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} \text{ para } z \neq 0$$

conclui-se que 0 é uma singularidade essencial e que  $\text{Res}(\text{sen } \frac{1}{z}, 0) = 1$ .

- (2) A função  $\frac{\text{sen } z}{z^3}$  tem também uma singularidade isolada em 0. Tem-se

$$\frac{\text{sen } z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!z^2} - \cdots$$

Conclui-se que 0 é um pólo de ordem 2 (também se diz um pólo duplo) e que  $\text{Res}(\frac{\text{sen } z}{z^3}, 0) = 0$  (uma vez que o coeficiente de  $\frac{1}{z}$  na expansão de Laurent é 0).

- (3) A função  $\frac{e^z - 1}{z}$  tem uma singularidade isolada em  $z = 0$ . Tem-se

$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z} \left( 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots - 1 \right) = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

pelos que 0 é uma singularidade removível (e portanto  $\text{Res}(\frac{e^z - 1}{z}, 0) = 0$ .)

*Esboço da demonstração do Teorema de Laurent 18.2.* Seja  $f$  uma função holomorfa na região definida por  $r < |z - z_0| < R$ . Dado  $z$  satisfazendo esta condição, podemos achar  $s, S$  tais que  $r < s < |z - z_0| < S < R$ . Vamos aplicar a fórmula integral de Cauchy ao seguinte caminho fechado (que é deformável num ponto dentro da região onde a função é holomorfa):

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = S\} \cup J \cup -\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = s\} \cup -J$$

onde  $J$  é um segmento de recta que une as duas circunferências, que lhes é perpendicular, e que não contém o ponto  $z$ . A curva  $C$  é percorrida da seguinte forma: a circunferência exterior é percorrida no sentido directo, depois  $J$  no sentido que aponta para  $z_0$ , depois a circunferência interior no sentido horário, e finalmente  $J$  no sentido contrário. A fórmula integral de Cauchy garante-nos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w - z_0| = S} \frac{f(w)}{w - z} dw + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w - z_0| = s} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

(uma vez que os termos relativos ao intervalo  $J$  percorrido em ambos os sentidos cancelam). O desenvolvimento em série de Laurent de  $f(z)$  segue agora do desenvolvimento de  $\frac{1}{w - z}$  em série de potências de  $(z - z_0)$ , com expoente positivo para o integral sobre a circunferência de raio  $S$ , e com expoente negativo para o integral sobre a circunferência de raio  $s$ , e da

troca da série com o sinal de integral, exactamente como na demonstração do Teorema de Taylor 17.3. Os detalhes deixam-se como exercício aos alunos interessados.  $\square$

## 19. TEOREMA DOS RESÍDUOS

Chegamos finalmente ao Teorema fundamental sobre o cálculo de integrais de funções complexas ao longo de caminhos fechados.

**Teorema 19.1** (Teorema dos Resíduos). *Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{C}$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa e  $C \subset U$  uma curva de Jordan. Se  $f$  tem apenas singularidades isoladas  $z_1, \dots, z_n$  no interior de  $C$ , então*

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(f(z), z_i).$$

**Nota 19.2.** *O número de singularidades isoladas de uma função holomorfa no interior de uma curva de Jordan é necessariamente finito (caso contrário as singularidades teriam um ponto de acumulação que seria uma singularidade, mas não seria isolada).*

**Nota 19.3.** *Se não há singularidades no interior de  $C$  a soma é 0 por convenção e recuperamos uma consequência do Teorema de Cauchy.*

**Exemplo 19.4.** *Vamos calcular*

$$\oint_{|z|=2} \left( e^{\frac{i}{z}} + \frac{z}{z-i} \right) dz.$$

*Há duas singularidades isoladas no interior da curva: 0 e  $i$ . O Teorema dos resíduos diz-nos que*

$$\oint_{|z|=2} \left( e^{\frac{i}{z}} + \frac{z}{z-i} \right) dz = 2\pi i \left( \text{Res} \left( e^{\frac{i}{z}} + \frac{z}{z-i}, 0 \right) + \text{Res} \left( e^{\frac{i}{z}} + \frac{z}{z-i}, i \right) \right).$$

*Uma vez que  $\frac{z}{z-i}$  é diferenciável em  $z = 0$ , o desenvolvimento desta função em série de potências de  $z$  tem apenas termos com potências de  $z$  de expoente positivo (é a série de MacLaurin) e portanto não contribui para o cálculo do resíduo. Assim*

$$\text{Res} \left( e^{\frac{i}{z}} + \frac{z}{z-i}, 0 \right) = \text{Res} \left( e^{\frac{i}{z}}, 0 \right)$$

*e, uma vez que,*

$$e^{\frac{i}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{i}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{i}{z^3} + \dots$$

*concluimos que  $\text{Res}(e^{\frac{i}{z}}, 0) = i$  (é, por definição, o coeficiente de  $\frac{1}{z}$  na expansão acima).*

*Da mesma maneira, temos*

$$\text{Res} \left( e^{\frac{i}{z}} + \frac{z}{z-i}, i \right) = \text{Res} \left( \frac{z}{z-i}, i \right)$$

*e uma vez que*

$$\frac{z}{z-i} = \frac{(z-i) + i}{z-i} = 1 + \frac{i}{z-i}$$

(a expansão de Laurent é finita) conclui-se que  $\text{Res}\left(\frac{z}{z-i}, i\right) = i$ . Conclui-se finalmente que

$$\oint_{|z|=2} \left( e^{\frac{i}{z}} + \frac{z}{z-i} \right) dz = 2\pi i(i+i) = -4\pi$$

Note-se que o cálculo do integral da parcela  $\frac{z}{z-i}$  podia também fazer-se usando a fórmula de Cauchy.

Nem sempre é prático determinar os resíduos a partir da expansão de Laurent. Por exemplo, seria muito difícil achar a expansão de Laurent junto a 0 da função  $\frac{1}{\sin z}$ . Vamos ver agora como, em certas situações, é possível classificar singularidades e determinar resíduos sem calcular a expansão de Laurent.

**Proposição 19.5.** *Seja  $f$  uma função holomorfa em  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$ . Então*

- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  existe e é finito  $\Leftrightarrow z_0$  é uma singularidade removível.
- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow z_0$  é um pólo.
- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  não existe  $\Leftrightarrow z_0$  é uma singularidade essencial.

*Justificação incompleta.* Note-se primeiro que, uma vez que as condições à esquerda e à direita das equivalências são mutuamente exclusivas e exaustivas, é suficiente mostrar as implicações da direita para a esquerda. Por exemplo, assumindo que se verificam as implicações da direita para a esquerda vejamos que se o limite existe e é finito então a singularidade é removível: Só temos que considerar as três possibilidades para a singularidade e as implicações da direita para a esquerda mostram que os casos em que  $z_0$  é um pólo ou uma singularidade essencial não são compatíveis com a finitude do limite.

Vejamos agora as duas primeiras implicações da direita para a esquerda: Se  $z_0$  é uma singularidade removível então, perto de  $z_0$  temos

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Mas a série define uma função diferenciável e portanto contínua em  $z_0$  logo

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0 \text{ é finito.}$$

Se  $z_0$  é um pólo de ordem  $k$  temos

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \quad \text{com } a_{-k} \neq 0$$

Claramente o termo  $\frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$  domina todos os restantes quando  $z$  tende para  $z_0$  pelo que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty.$$

Resta perceber porque é que o limite numa singularidade essencial não existe. □

O resultado anterior ajuda-nos a calcular resíduos quando a singularidade em causa é removível ou um pólo (se a singularidade for essencial não temos outro remédio senão usar a série de Laurent). Se a singularidade é removível o resíduo é obviamente 0. Se a singularidade é um pólo podemos calcular o resíduo da maneira indicada na proposição seguinte.



**Proposição 19.6.** Se  $f(z)$  tem um pólo em  $z_0$  então

- a ordem do pólo é o único  $k \geq 1$  tal que  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$  é finito e não nulo.
- Se  $f$  tem um pólo de ordem  $k$  em  $z_0$  então

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{(k-1)} ((z - z_0)^k f(z)).$$

**Exemplo 19.7.** Vamos determinar as singularidades e calcular os resíduos da função  $f(z) = \frac{1}{\text{sen } z}$ . As singularidades são as soluções da equação

$$\text{sen } z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Temos

$$\lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{1}{\text{sen } z} = \frac{1}{0} = \infty$$

logo, pela Proposição 19.5 todas estas singularidades são pólos. Como

$$\lim_{z \rightarrow k\pi} (z - k\pi) \frac{1}{\text{sen } z} = \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\cos k\pi} = (-1)^k$$

(onde na primeira igualdade aplicamos a Regra de Cauchy para resolver a indeterminação), conclui-se da Proposição 19.6 que as singularidades são todas pólos de ordem 1. Mas então, novamente pela Proposição 19.6, os limites que acabamos de calcular dão também os resíduos, isto é,

$$\text{Res} \left( \frac{1}{\text{sen } z}, k\pi \right) = (-1)^k.$$

*Demonstração do Teorema dos Resíduos 19.1.* Pelo Teorema de Cauchy podemos deformar a curva de integração  $C$  numa união de pequenas circunferências em torno de cada uma das singularidades no interior da curva. Isto é

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{i=1}^n \oint_{|z-z_i|=\epsilon} f(z) dz$$

onde  $\epsilon > 0$  é suficientemente pequeno para que as circunferências estejam contidas no interior de  $C$  e contenham apenas uma singularidade de  $f$ . Basta agora mostrar que

$$\oint_{|z-z_i|=\epsilon} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_i) \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n.$$

Mas se  $z_0$  uma singularidade isolada de uma função  $f$  e

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

é o desenvolvimento de Laurent válido em  $\{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < r\}$  então dado  $\epsilon < r$  temos

$$\oint_{|z-z_0|=\epsilon} f(z) dz = \oint_{|z-z_0|=\epsilon} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \right) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_{|z-z_0|=\epsilon} (z - z_0)^n dz$$

(onde a troca da série com o integral é justificada pela convergência uniforme da série sobre a circunferência). Uma vez que

$$\oint_{|z-z_0|=\epsilon} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq -1 \text{ (porque a função } (z-z_0)^n \text{ é primitivável),} \\ 2\pi i & \text{se } n = -1 \text{ (por um cálculo directo)} \end{cases}$$

conclui-se que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_{|z-z_0|=\epsilon} (z-z_0)^n dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0)$$

o que conclui a demonstração.  $\square$

*Demonstração da Proposição 19.6.* Se  $z_0$  é um pólo de ordem  $k$  de  $f$  então para  $z$  próximo de  $z_0$  temos

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

(com  $a_{-k} \neq 0$ ) e portanto

$$(z-z_0)^j f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^{k-j}} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-j-1}} + \cdots + a_0(z-z_0)^j + a_1(z-z_0)^{j+1} + \cdots$$

Conclui-se que o limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^j f(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } k-j < 0 \Leftrightarrow j > k \text{ pois então todos os expoentes são positivos} \\ a_{-k} & \text{se } k=j \\ \infty & \text{se } k-j > 0 \Leftrightarrow j < k \text{ pois } (z-z_0)^j f(z) \text{ tem então um pólo em } z_0. \end{cases}$$

Isto justifica a primeira afirmação na Proposição 19.6. Para ver a segunda note-se que

$$(z-z_0)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + a_0(z-z_0)^k + \cdots$$

A fórmula para o resíduo  $a_{-1}$  obtém-se derivando a expressão acima  $(k-1)$  vezes e tomando o limite quando  $z \rightarrow z_0$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} ((z-z_0)^k f(z)) &= \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} (a_{-k} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + a_0(z-z_0)^k + \cdots) \\ &= 0 + \cdots + (k-1)!a_{-1} + a_0(k(k-1)\cdots 2)(z-z_0) + \cdots \end{aligned}$$

(onde usámos a Proposição 17.7 para derivar a série termo a termo). Tomando o limite de ambos os lados da igualdade obtemos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} ((z-z_0)^k f(z)) = (k-1)!a_{-1} = (k-1)! \operatorname{Res}(f, z_0)$$

conforme pretendido.  $\square$

Para aplicar as Proposições 19.5 e 19.6 é útil notar que podemos aplicar a regra de Cauchy para resolver indeterminações do tipo  $\frac{0}{0}$  em limites de funções complexas. A razão é a seguinte: sejam  $f(z)$  e  $g(z)$  funções holomorfas num aberto contendo  $z_0$  e que se anulam em  $z_0$  de maneira que o limite  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$  produz uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ . Podemos determinar o limite do quociente a partir das expansões de Taylor de  $f$  e  $g$  em torno de  $z_0$  da seguinte forma. Escrevemos

$$f(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots \text{ com } k \geq 1, a_k \neq 0$$

$$g(z) = b_m(z - z_0)^m + b_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots \text{ com } m \geq 1, b_m \neq 0$$

(os expoentes  $k$  e  $m$  dos primeiros termos não nulos da expansão de Taylor de  $f$  e  $g$  dizem-se as *ordens do zero*  $z_0$  de  $f$  e  $g$  respectivamente). Portanto

$$f(z) \sim a_k(z - z_0)^k \quad \text{e} \quad g(z) \sim b_m(z - z_0)^m \quad \text{para } z \text{ próximo de } z_0$$

e portanto

$$\frac{f(z)}{g(z)} \sim \frac{a_k}{b_m}(z - z_0)^{k-m} \quad \text{para } z \text{ próximo de } z_0$$

Da expressão anterior conclui-se que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} 0 & \text{se } k > m \\ \frac{a_k}{b_m} & \text{se } k = m \\ \infty & \text{se } k < m \end{cases}$$

Dado que se podem derivar as expansões de Taylor termo a termo é agora imediato concluir que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Deixa-se a justificação detalhada aos alunos interessados.

### Exemplo 19.8.

(1) *Classificar as singularidades e calcular os resíduos da função  $f(z) = \frac{1}{z \operatorname{sen} z}$ . As singularidades de  $f(z)$  são as soluções da equação*

$$z \operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

*Claramente*

$$\lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{1}{z \operatorname{sen} z} = \infty$$

*pelo que todas estas singularidades são pólos. Vamos analisar separadamente 0 e  $k\pi$  com  $k \neq 0$ . Em 0 temos*

$$\frac{1}{z \operatorname{sen} z} = \frac{1}{z(z - \frac{z^3}{3!} + \dots)} \sim \frac{1}{z^2}$$

*pelo que  $z = 0$  é um pólo de ordem 2. Podemos verificar isto recorrendo à Proposição 19.6:*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{z \operatorname{sen} z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{sen} z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\cos z} = 1$$

(onde aplicámos a regra de Cauchy na penúltima passagem). O resíduo pode ser calculado recorrendo à Proposição 19.6:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z \operatorname{sen} z}, 0\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{z \operatorname{sen} z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z - z \cos z}{\operatorname{sen}^2 z}$$

Aplicando a regra de Cauchy este limite é

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\cos z - \cos z + z \operatorname{sen} z}{2 \operatorname{sen} z \cos z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\operatorname{sen} z}{2 \cos z} = 0$$

logo

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z \operatorname{sen} z}, 0\right) = 0.$$

Nas restantes singularidades,  $k\pi$  com  $k \neq 0$ , temos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \operatorname{sen}((z - k\pi) + k\pi) \\ &= (-1)^k \operatorname{sen}(z - k\pi) = (-1)^k (z - k\pi) - (-1)^k \frac{1}{3!} (z - k\pi)^3 + \dots \\ &\sim (-1)^k (z - k\pi) \text{ para } z \sim k\pi \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{1}{z \operatorname{sen} z} \sim \frac{1}{k\pi(-1)^k(z - k\pi)} \quad \text{para } z \sim k\pi (k \neq 0).$$

Para  $k \neq 0$ , o ponto  $k\pi$  é portanto um pólo de ordem 1. Podemos verificá-lo (e calcular o resíduo) calculando o limite

$$\lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{z - k\pi}{z \operatorname{sen} z} = \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{1}{\operatorname{sen} z + z \cos z} = \frac{1}{k\pi(-1)^k}.$$

Portanto

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z \operatorname{sen} z}, k\pi\right) = \frac{1}{k\pi(-1)^k}.$$

(2) Calcular  $\oint_{|z|=4} \frac{1}{z \operatorname{sen} z} dz$ . As singularidades no interior da curva de integração são  $-\pi, 0$  e  $\pi$ . Pelo Teorema dos Resíduos e os cálculos da alínea anterior temos

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=4} \frac{1}{z \operatorname{sen} z} dz &= -2\pi i \left( \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z \operatorname{sen} z}, -\pi\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z \operatorname{sen} z}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z \operatorname{sen} z}, \pi\right) \right) \\ &= -2\pi i \left( \frac{1}{\pi} + 0 - \frac{1}{\pi} \right) = 0 \end{aligned}$$

(onde o sinal  $-$  se deve ao facto de a circunferência ser percorrida no sentido horário).

## 20. APLICAÇÕES DO TEOREMA DOS RESÍDUOS

O Teorema dos Resíduos pode ser aplicado ao cálculo de integrais reais como veremos agora em alguns exemplos.

**Exemplo 20.1.** Calcular  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ .

Por definição, o integral anterior (a que se chama um integral impróprio) é igual ao limite

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Os integrais dentro do limite podem ser vistos como o integral de caminho da função complexa  $\frac{1}{1+z^4}$  ao longo do segmento de recta no plano complexo que une  $-R + 0i$  a  $R + 0i$  (basta aplicar a definição de integral à parametrização  $z = x$  com  $-R \leq x \leq R$ ). Vamos chamar  $I_R$  a este segmento de recta. Para aplicar o Teorema dos Resíduos precisamos de um caminho de integração fechado e vamos "fechar"  $I_R$  concatenando-o com a semicircunferência

$$C_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| = R, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

percorrida no sentido directo, obtendo o contorno fechado  $\Gamma_R = I_R \cup C_R$ .

As singularidades de  $\frac{1}{1+z^4}$  são os elementos de  $\sqrt[4]{-1} = \{e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}, e^{i5\pi/4}, e^{i7\pi/4}\}$ . e apenas as primeiras duas estão no interior de  $\Gamma_R$  (para  $R > 1$ ) logo, pelo Teorema dos Resíduos temos (para  $R > 1$ ),

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz = 2\pi i \left( \operatorname{Res} \left( \frac{1}{1+z^4}, e^{i\pi/4} \right) + \operatorname{Res} \left( \frac{1}{1+z^4}, e^{i3\pi/4} \right) \right).$$

As singularidades de  $\frac{1}{1+z^4}$  são todas pólos simples e podemos (pela Proposição 19.6) calcular os resíduos através dos limites

$$\operatorname{Res} \left( \frac{1}{1+z^4}, e^{i\pi/4} \right) = \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/4}} \frac{z - e^{i\pi/4}}{1+z^4} = \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} e^{-i3\pi/4}$$

e

$$\operatorname{Res} \left( \frac{1}{1+z^4}, e^{i3\pi/4} \right) = \lim_{z \rightarrow e^{i3\pi/4}} \frac{z - e^{i3\pi/4}}{1+z^4} = \lim_{z \rightarrow e^{i3\pi/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} e^{-i9\pi/4} = \frac{1}{4} e^{-i\pi/4}.$$

Conclui-se que

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz = 2\pi i \frac{1}{4} \left( e^{-i\pi/4} + e^{-i3\pi/4} \right) = \frac{\pi i}{2} (-\sqrt{2}i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \text{para } R > 1.$$

Tomando o limite quando  $R$  tende para  $\infty$  na igualdade

$$\int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx + \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4} dz = \int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

e o cálculo estará terminado se conseguirmos ver que o integral sobre a semi-circunferência  $C_R$  tende para 0 quando  $R \rightarrow \infty$ . Para  $z$  in  $C_R$  temos

$$|1 + z^4| \geq |z|^4 - 1 \geq R^4 - 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{1 + z^4} \right| \leq \frac{1}{R^4 - 1}$$

e portanto, pela desigualdade triangular,

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{1}{1 + z^4} dz \right| \leq \int_{C_R} \frac{1}{R^4 - 1} ds = \frac{\pi R}{R^4 - 1} \rightarrow 0 \quad \text{quando } R \rightarrow \infty.$$

Concluimos então que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

**Exemplo 20.2.** Calcular  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \operatorname{sen} \theta} d\theta$ .

O integral anterior pode ser visto como o integral de uma função holomorfa sobre a circunferência de raio 1. De facto, usando a parametrização  $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , temos

$$(17) \quad \oint_{|z|=1} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta.$$

e podemos usar a fórmula para  $\operatorname{sen} \theta$  em termos da exponencial complexa para escrever

$$(18) \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \operatorname{sen} \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}} d\theta.$$

Para que (17) e (18) coincidam precisamos que

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) ie^{i\theta} &= \frac{1}{2 + \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}} \\ f(e^{i\theta}) &= \frac{1}{2 + \frac{e^{i\theta} - \frac{1}{e^{i\theta}}}{2i}} \frac{1}{ie^{i\theta}} \\ f(z) &= \frac{1}{2 + \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}} \frac{1}{iz} = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} \end{aligned}$$

A função  $f(z)$  tem dois pólos simples nos pontos  $z$  que satisfazem a equação

$$z^2 + 4iz - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-4i \pm \sqrt{-16 + 4}}{2} = (-2 \pm \sqrt{3})i.$$

Destes apenas  $(-2 + \sqrt{3})i$  pertence ao interior da circunferência de raio 1. O Resíduo nesta singularidade é (de acordo com a Proposição 19.6)

$$\operatorname{Res}(f(z), (-2 + \sqrt{3})i) = \lim_{z \rightarrow (-2 + \sqrt{3})i} \frac{2(z + (2 - \sqrt{3})i)}{z^2 + 4iz - 1} = \lim_{z \rightarrow (-2 + \sqrt{3})i} \frac{2}{2z + 4i} = \frac{1}{\sqrt{3}i}$$

e portanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \operatorname{sen} \theta} d\theta = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{3}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

**Nota 20.3.** O método usado no exemplo anterior pode ser usado, pelo menos em princípio, para calcular o integral de qualquer função racional de  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  no intervalo  $[0, 2\pi]$ : Dada uma tal função  $R(\sin \theta, \cos \theta)$ , usando as fórmulas

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}; \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

temos que a função racional

$$f(z) = R\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{1}{iz}$$

satisfaz

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

e o integral da esquerda pode ser calculado usando o Teorema dos Resíduos.

**Exemplo 20.4.** Calcular  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx$ .

Vamos usar o método do Exemplo 20.1. Consideramos o contorno de integração

$$\Gamma_R = I_R \cup C_R$$

onde  $I_R = [-R, R] \subset \mathbb{C}$  e  $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ . Vamos escrever o integral do enunciado como integral de uma função holomorfa ao longo do caminho  $I_R$ . Se conseguirmos ver que o integral sobre a semicircunferência  $C_R$  tende para zero quando  $R \rightarrow \infty$ , vamos conseguir calcular o integral do enunciado pelo Teorema dos Resíduos tal como no Exemplo 20.1.

A escolha óbvia de função  $f(z)$  a integrar sobre  $I_R$  é  $f(z) = \frac{z \sin z}{z^2+1}$ . No entanto, se fizermos esta escolha o limite do integral sobre a semi-circunferência não será 0, uma vez que  $\sin z$  tende exponencialmente para  $\infty$  ao longo do eixo imaginário positivo. Para resolver este problema podemos notar que

$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix})$$

e portanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx = \operatorname{Im} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2+1} dx \right)$$

bastando portanto calcular o integral que aparece no termo direito da equação anterior. Note-se que ao longo do eixo imaginário  $e^{iz}$  tende para 0 exponencialmente pelo que há alguma hipótese que o integral na semi-circunferência tenda para 0.

A função  $f(z) = \frac{z e^{iz}}{z^2+1}$  tem apenas as singularidades isoladas  $z = \pm i$  que são ambas pólos simples. O contorno de integração  $C_R$  contém unicamente a singularidade  $+i$  para  $R > 1$ . Pela Proposição 19.6 temos

$$\operatorname{Res} \left( \frac{z e^{iz}}{z^2+1}, i \right) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{z e^{iz}}{(z - i)(z + i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z e^{iz}}{z + i} = \frac{i e^{-1}}{2i} = \frac{1}{2e}.$$

Tomando o limite quando  $R \rightarrow \infty$  na igualdade

$$\int_{-R}^R \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx + \int_{C_R} \frac{z e^{iz}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \frac{1}{2e} = \frac{\pi}{e} i$$

obtem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z e^{iz}}{z^2 + 1} dz = \frac{\pi}{e} i$$

e basta-nos agora mostrar que o limite do integral sobre a circunferência tende para 0.

Temos  $|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = |e^{ix-y}| = e^{-y}$ . Sobre a circunferência  $C_R$  temos  $y \geq 0$ , logo  $|e^{iz}| \leq 1$  mas esta majoração não é suficientemente boa para mostrar que o integral sobre  $C_R$  tende para 0. Em vez disso podemos parametrizar  $C_R$  da maneira habitual com o caminho

$$\gamma(t) = R e^{it}, \text{ com } 0 \leq t \leq \pi$$

e usar

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{z e^{iz}}{1 + z^2} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{R e^{it} e^{i R e^{it}}}{R^2 e^{2it} + 1} i R e^{it} dt \right| \\ &\leq \int_0^\pi \left| \frac{R e^{it} e^{i R e^{it}}}{R^2 e^{2it} + 1} i R e^{it} \right| dt \\ &= \int_0^\pi \frac{R e^{-R \operatorname{sen} t}}{|R^2 e^{2it} + 1|} R dt \end{aligned}$$

onde usámos que  $|e^{i R e^{it}}| = |e^{-R \operatorname{sen} t + i R \cos t}| = e^{-R \operatorname{sen} t}$ . Uma vez que

$$|R^2 e^{2it} + 1| \geq |R^2 e^{2it}| - 1 = R^2 - 1$$

temos

$$\int_0^\pi \frac{R e^{-R \operatorname{sen} t}}{|R^2 e^{2it} + 1|} R dt \leq \frac{R^2}{R^2 - 1} \int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen} t} dt$$

e resta-nos perceber porque é que  $\int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen} t} dt \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow \infty$ . Não se pode calcular directamente o integral, mas tendo em conta que a função  $\operatorname{sen} t$  é simétrica em relação a  $t = \frac{\pi}{2}$  (isto é  $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ ) temos

$$\int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen} t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen} t} dt$$

Por outro lado

$$\operatorname{sen} t \geq \frac{2}{\pi} t \quad \text{para } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

(a equação à direita da desigualdade é a equação da recta que passa pela origem e pelo ponto  $(\frac{\pi}{2}, 1) = (\frac{\pi}{2}, \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}))$  pelo que a desigualdade é clara se desenharmos o gráfico de  $\operatorname{sen} t$ ), logo

$$e^{-R \operatorname{sen} t} \leq e^{-R \frac{2}{\pi} t} \quad \text{para } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$



e portanto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen} t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \frac{2}{\pi} t} dt = -\frac{\pi}{2R} e^{-R \frac{2}{\pi} t} \Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) \rightarrow 0 \text{ quando } R \rightarrow \infty$$

como pretendíamos. Conclui-se assim finalmente que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1} = \operatorname{Im} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{\pi}{e} i \right) = \frac{\pi}{e}.$$

O argumento usado no exemplo anterior mostra mais geralmente o seguinte resultado:

**Lema 20.5** (Lema de Jordan). *Seja  $a > 0$  e  $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$  a semicircunferência de raio  $R$ . Dado  $L \in \mathbb{R}$ , seja  $f: \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0, |z| \geq L\} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua tal que*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \max_{z \in C_R} |f(z)| = 0.$$

Então

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0.$$

*Dem.* Basta copiar a majoração feita no Exemplo 20.4 (exercício).  $\square$

Podem usar este resultado na resolução de exercícios sem refazer a majoração do Exemplo 20.4.

**Exemplo 20.6.** *No Exemplo 20.4, poderíamos ter mostrado que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z e^{iz}}{z^2 + 1} dz = 0$  tomando  $a = 1$  e  $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$  no lema de Jordan, uma vez que*

$$\max_{z \in C_R} \left| \frac{z}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{R}{R^2 - 1} \rightarrow 0 \quad \text{quando } R \rightarrow +\infty.$$

## 21. INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função e que envolve derivadas da incógnita. Quando a incógnita é uma função de uma só variável, a equação diz-se uma *equação diferencial ordinária*. Um exemplo é a equação

$$\frac{dy}{dt} = y$$

onde a incógnita é uma função  $y = y(t)$ . Frequentemente a função  $y(t)$  modela a evolução com o tempo de uma certa quantidade (daí usarmos  $t$  para a variável independente).

Quando a incógnita é uma função de várias variáveis, a equação diferencial diz-se uma *equação diferencial parcial*. Um exemplo é a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

que tem por incógnita uma função  $u(x, y)$  de duas variáveis.

Neste curso vamos estudar principalmente equações diferenciais ordinárias (que são muito mais simples do que as equações diferenciais parciais). No final do semestre falaremos

brevemente de algumas das equações diferenciais parciais mais simples (e importantes) - as equações de Laplace, das ondas e do calor.

**21.1. Equações diferenciais ordinárias.** Vamos agora iniciar o estudo das equações diferenciais ordinárias aprendendo alguns métodos elementares de resolução, que nos vão permitir também ganhar alguma familiaridade com estas equações.

A equação diferencial mais simples é

$$(19) \quad \frac{dy}{dt} = f(t)$$

onde  $f(t)$  é uma função contínua. Aprenderam já a resolver esta equação em Cálculo 1. A solução é

$$y(t) = F(t) + K \quad \text{com } F \text{ uma primitiva de } f, \text{ e } K \in \mathbb{R}.$$

Por exemplo,

$$\frac{dy}{dt} = t \Leftrightarrow y(t) = \frac{t^2}{2} + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Mesmo uma equação tão simples como (19) exemplifica já duas propriedades gerais das equações diferenciais ordinárias:

- (1) Uma equação diferencial tem tipicamente infinitas soluções. Para especificar uma solução pode fixar-se o valor que  $y(t)$  toma para um dado valor de  $t$ . O problema resultante, constituído pela equação juntamente com a condição  $y(t_0) = y_0$ , chama-se um *problema de valor inicial*.
- (2) Tipicamente, é impossível resolver explicitamente uma equação diferencial. Não é possível, por exemplo, dar uma expressão explícita para a solução de

$$\frac{dy}{dt} = e^{t^2}$$

em termos de funções elementares.

Vamos agora iniciar o estudo de alguns métodos elementares de resolução de equações diferenciais ordinárias. Vale a pena notar que todos eles consistem na redução da equação diferencial dada a uma equação equivalente a (19) por meio de manipulações algébricas da equação inicial. Em particular, é preciso saber primitivar para resolver equações diferenciais.

**21.2. Equações lineares homogéneas.** As equações mais simples a seguir às da forma (19) são as equações lineares homogéneas. Um exemplo é a equação

$$\frac{dy}{dt} = \text{sen}(t)y$$

Para  $y \neq 0$ , a equação é equivalente a

$$\frac{dy}{dt} = \text{sen } t$$

que está já na forma (19). De facto, é equivalente a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\log |y(t)|) &= \operatorname{sen} t \\ \log |y(t)| &= -\cos t + K, \quad K \in \mathbb{R} \\ |y(t)| &= e^K e^{-\cos t}, \quad K \in \mathbb{R} \\ y(t) &= \pm e^K e^{-\cos t}, \quad K \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Uma vez que  $K$  é arbitrário,  $\pm e^K$  é um elemento qualquer de  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Conclui-se assim que as soluções que nunca se anulam são

$$y(t) = Ce^{-\cos t}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Notando que  $y(t) = 0$  é também uma solução da equação inicial obtemos então as soluções

$$y(t) = Ce^{-\cos t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Não é totalmente claro da explicação anterior que tenhamos obtido todas as soluções. Poderá haver soluções que se anulem nalguns instantes mas não sempre? Falaremos destas questões daqui a algumas aulas (e veremos então que as soluções obtidas são de facto as únicas soluções).

O procedimento seguido no exemplo anterior resolve qualquer equação da forma

$$(20) \quad \frac{dy}{dt} = a(t)y$$

que se designa por equação linear homogénea (escalar e de primeira ordem):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \log |y(t)| &= a(t) \\ \log |y(t)| &= \int a(t) dt \\ y(t) &= Ce^{\int a(t) dt}, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**Nota 21.3.** A equação (20) diz-se linear homogénea porque pode de facto ser encarada como uma das equações com este nome estudadas em *Álgebra Linear*. Se  $V$  for o espaço vectorial real formado pelas funções diferenciáveis e  $W$  for o espaço vectorial de todas as funções, podemos definir uma transformação linear  $T: V \rightarrow W$  que associa a um elemento  $y \in V$  o elemento

$$T(y) = \frac{dy}{dt} - ay \in W$$

(onde  $a = a(t)$  é o coeficiente de  $y$  em (20)). É imediato verificar que para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  se tem  $T(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T(y_1) + \beta T(y_2)$ , ou seja, que  $T$  é uma transformação linear. Assim, a equação diferencial (20) pode ser escrita na forma  $T(y) = 0$  e é portanto um exemplo das equações lineares homogéneas estudadas em *Álgebra Linear*.

Uma consequência desta observação é que o conjunto das soluções da equação (20) forma um espaço vectorial real, o que é consistente com a forma das soluções que obtivemos acima.

21.4. **Um exemplo simples de modelação por equações diferenciais.** Acontece frequentemente que uma quantidade evolui no tempo da seguinte forma: passado um intervalo fixo de tempo a quantidade aumenta ou diminui uma certa percentagem determinada pelo intervalo de tempo. Alguns exemplos são:

- (1) **Decaimento radioactivo.** Dada uma substância radioactiva (urânio por exemplo) então, passado um certo intervalo de tempo, uma certa percentagem fixa da substância decaiu em elementos mais leves. Uma medida da rapidez com que o elemento decai (e portanto da radioactividade do elemento) é a *meia vida* do elemento - o tempo necessário para que decaia metade da substância.
- (2) **Crescimento de populações.** Uma população (de bactérias por exemplo) cujo crescimento não está sujeito a qualquer restrição (de espaço, nutrientes, existência de predadores) cresce a uma certa taxa por intervalo de tempo, taxa essa que é determinada por parâmetros biológicos (velocidade de reprodução).
- (3) **Juros.** Quando um depósito num banco é remunerado a 2% ao ano, a quantidade de dinheiro no banco é multiplicada por 1,02 após cada ano.

O comportamento descrito acima pode ser formalizado da seguinte forma: Se  $y(t)$  for a quantidade que pretendemos descrever e  $T$  for um intervalo de tempo fixado, temos, para todo o  $t$ ,

$$(21) \quad y(t + T) = C_T y(t)$$

onde  $C_T \in ]0, +\infty[$  é uma constante (que depende do intervalo de tempo  $T$ ). No exemplo dos juros acima teríamos  $T = 1$  ano, e  $C_T = 1,02$ . Da equação (21) segue que

$$y(t + 2T) = C_T y(t + T) = (C_T)^2 y(t); \quad y(t + 3T) = (C_T)^3 y(t)$$

e mais geralmente

$$y(t + nT) = (C_T)^n y(t)$$

ou seja  $C_{nT} = (C_T)^n$ . Analogamente podemos determinar a taxa de crescimento para períodos mais curtos (admitindo que a evolução se processa sempre do mesmo modo). Por exemplo

$$y(t + T) = y\left(t + 2\frac{T}{2}\right) = (C_{\frac{T}{2}})^2 y(t)$$

pelo que

$$C_{\frac{T}{2}} = \sqrt{C_T}.$$

Da mesma forma vemos que

$$C_{\frac{T}{n}} = \sqrt[n]{C_T}$$

e então

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y\left(t + \frac{T}{n}\right) - y(t)}{\frac{T}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{C_T} y(t) - y(t)}{\frac{T}{n}} \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{C_T} - 1}{\frac{T}{n}} \right) y(t) \end{aligned}$$

Temos que calcular o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{C_T} - 1}{\frac{T}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\log C_T}{n}} - 1}{T/n}$$

que é uma indeterminação  $0/0$ . Esta pode ser resolvida usando a fórmula de Cauchy ou notando que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \sim 1 + x$$

e portanto

$$\frac{e^{\frac{\log C_T}{n}} - 1}{T/n} \sim \frac{1 + \frac{\log C_T}{n} - 1}{\frac{T}{n}} = \frac{\log C_T}{T}.$$

Conclui-se finalmente que a quantidade  $y(t)$  obedece à equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\log C_T}{T} y$$

que é uma equação do tipo (20). É fácil achar as soluções pelo método descrito acima: são

$$y(t) = \alpha e^{\frac{\log C_T}{T} t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

## 22. EQUAÇÕES LINEARES E SEPARÁVEIS. MUDANÇA DE VARIÁVEL

Vamos agora descrever mais alguns métodos elementares de resolução de equações diferenciais.

**22.1. Equações lineares (não homogêneas).** Dá-se esta designação às equações que se podem escrever na forma

$$(22) \quad \frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

onde  $a(t)$  e  $b(t)$  são funções dadas. Esta equação pode ser reduzida a uma equação da forma (19) multiplicando pela função

$$(23) \quad e^{\int a(t) dt}$$

(que se chama um factor integrante). De facto, a função (23) nunca se anula pelo que a equação (22) é equivalente a

$$e^{\int a(t)dt} \frac{dy}{dt} + a(t)e^{\int a(t)dt} y = b(t)e^{\int a(t)dt}$$

que se pode escrever

$$\frac{d}{dt} \left( e^{\int a(t)dt} y(t) \right) = b(t)e^{\int a(t)dt}.$$

É agora fácil resolver esta equação, primitivando a função que aparece à direita do sinal de igual.

**Exemplo 22.2.** Resolver o problema de valor inicial  $\frac{dy}{dt} + ty = 2t$ ;  $y(0) = 0$ .

Uma vez que  $\int t dt = \frac{t^2}{2}$ , multiplicando a equação por  $e^{\frac{t^2}{2}}$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( e^{\frac{t^2}{2}} y \right) &= 2te^{\frac{t^2}{2}} \\ e^{\frac{t^2}{2}} y(t) &= 2e^{\frac{t^2}{2}} + K, \quad K \in \mathbb{R} \\ y(t) &= 2 + Ke^{-\frac{t^2}{2}}, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Substituindo na condição inicial  $y(0) = 0$  obtemos

$$0 = 2 + K \Leftrightarrow K = -2$$

logo a solução é

$$y(t) = 2 - 2e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

**Nota 22.3.** As equações lineares homogéneas (20) são o caso particular  $b(t) = 0$  das equações (22). Podem portanto ser resolvidas pelo método agora descrito. Fica como exercício verificar que se obtêm as soluções descritas anteriormente, com a vantagem de que, pelo novo método, não há qualquer dúvida que se obtêm todas as soluções (uma vez que na obtenção das soluções não há necessidade de excluir os casos em que  $y(t)$  se anula).

**22.4. Equações separáveis.** Chamam-se equações separáveis aquelas que se podem escrever na forma

$$f(y) \frac{dy}{dt} = g(t).$$

As equações (20) são desta forma e o método de resolução que usámos acima pode também ser aplicado. Se  $F(y)$  é uma primitiva da função  $f(y)$  então a regra de derivação da função composta permite-nos re-escrever a equação na forma

$$\frac{d}{dt} (F(y(t))) = g(t)$$

que está na forma (19). A solução geral obtém-se resolvendo a equação (algébrica) para  $y$  dada por

$$F(y) = \int g(t)dt + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 22.5.** Achar a solução geral da equação  $\cos y \frac{dy}{dt} = -\frac{t \operatorname{sen} y}{1+t^2}$ .

Esta equação pode escrever-se (para  $\operatorname{sen} y \neq 0$ ) na forma

$$\frac{\cos y \, dy}{\operatorname{sen} y \, dt} = -\frac{t}{1+t^2}$$

e, uma vez que,

$$\int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y} dy = \log |\operatorname{sen} y|$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\log |\operatorname{sen} y|) &= -\frac{t}{1+t^2} \\ \log |\operatorname{sen} y(t)| &= -\frac{1}{2} \log(1+t^2) + K, K \in \mathbb{R} \\ |\operatorname{sen} y(t)| &= e^{-\frac{1}{2} \log(1+t^2) + K}, K \in \mathbb{R} \\ \operatorname{sen} y(t) &= \pm e^K \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Notando que se  $\operatorname{sen} y(t) = 0 \Leftrightarrow y(t) = k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$  então  $y(t)$  é uma solução (constante) da equação inicial, vemos que as funções  $y(t)$  que satisfazem a equação

$$\operatorname{sen}(y(t)) = C \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, C \in \mathbb{R}$$

são soluções da equação diferencial. Resolvendo esta equação obtem-se

$$y(t) = \arcsen\left(C \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) + 2k\pi \text{ ou } y(t) = \pi - \arcsen\left(C \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) + 2k\pi, \text{ com } C \in \mathbb{R}.$$

**22.6. Mudança de variável.** Em qualquer problema de cálculo, uma mudança de variável apropriada pode simplificar o problema a resolver. O mesmo sucede na resolução de equações diferenciais. O processo é muito simples (a dificuldade reside sempre na escolha da mudança de variável) e é exemplificado a seguir:

**Exemplo 22.7.** Resolver o problema de valor inicial  $\frac{dy}{dt} = 2\frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2$ ;  $y(1) = 1$ .

Esta equação não é linear nem separável pelo que não a sabemos resolver directamente. Fazendo a mudança de variável  $u = \frac{y}{t} \Leftrightarrow y = tu$  e notando que

$$\frac{dy}{dt} = u + t \frac{du}{dt}$$

podemos escrever a equação em termos da nova variável  $u$ :

$$u + t \frac{du}{dt} = 2u + u^2 \Leftrightarrow \frac{1}{u + u^2} \frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$$

obtendo-se assim uma equação separável. Temos

$$\frac{1}{u + u^2} = \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \Rightarrow \int \frac{1}{u + u^2} du = \log \left| \frac{u}{1+u} \right|$$

logo a equação a resolver é

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \log \left| \frac{u}{1+u} \right| \right) &= \frac{1}{t} \\ \log \left| \frac{u}{1+u} \right| &= \log |t| + K, K \in \mathbb{R} \\ \frac{u}{1+u} &= \pm e^K |t| = Ct, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ u(t) &= \frac{1}{1-Ct} - 1, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

Se  $C = 0$  na expressão acima obtém-se a função constante  $u(t) = 0$  que é também uma solução da equação. Obtemos assim as soluções

$$u(t) = \frac{1}{1-Ct} - 1, C \in \mathbb{R}.$$

E portanto

$$y(t) = tu(t) = \frac{t}{1-Ct} - t, C \in \mathbb{R}.$$

Substituindo na condição inicial temos

$$1 = \frac{1}{1-C} - 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$$

pelo que a resposta é

$$y(t) = \frac{t}{1-\frac{1}{2}t} - t.$$

## 23. EQUAÇÕES EXACTAS E REDUTÍVEIS A EXACTAS

**23.1. Equações exactas.** As equações exactas são as que se podem escrever na forma

$$(24) \quad M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

com  $(M, N) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \nabla \phi$  para alguma função  $\phi = \phi(t, y)$  que se chama um *potencial escalar* para  $(M, N)$ . Recorde-se de Cálculo 2 que uma condição necessária e (pelo menos localmente) suficiente para que  $(M, N)$  seja um gradiente é que  $(M, N)$  seja um campo vectorial fechado, isto é, que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Se esta equação se verifica é possível (pelo menos localmente perto de um ponto  $(t, y)$ ) obter um potencial escalar para o campo vectorial  $(M, N)$ . A regra da cadeia diz que

$$\frac{d}{dt} (\phi(t, y(t))) = \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot 1 + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt}$$



e portanto a equação (24) pode escrever-se na forma (19):

$$\frac{d}{dt}(\phi(t, y(t))) = 0 \Leftrightarrow \phi(t, y) = K, \quad K \in \mathbb{R}$$

que é uma equação algébrica que permite determinar  $y(t)$ .

**Nota 23.2.** *Geometricamente, a condição  $\phi(t, y) = K$  diz que os gráficos das soluções da equação diferencial estão contidas em curvas de nível de  $\phi$ . A função  $\phi$  é portanto uma quantidade conservada ao longo do tempo pelas soluções da equação diferencial. Esta situação ocorre frequentemente em Física, onde  $\phi$  é muitas vezes algum tipo de energia, e a condição  $\phi(t, y) = K$  manifesta uma lei de conservação.*

**Exemplo 23.3.** *Resolver o problema de valor inicial*

$$y^2 + 2ty + (2yt + t^2)\frac{dy}{dt} = 0; \quad y(1) = 1.$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial y}(2yt + t^2) = 2y + 2t = \frac{\partial}{\partial t}(2yt + t^2)$$

a equação é exacta. Um potencial é uma solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = y^2 + 2ty \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2yt + t^2 \end{cases}$$

A primeira equação tem solução

$$\phi(t, y) = y^2t + t^2y + A(y)$$

e substituindo na segunda equação obtemos  $A'(y) = 0$ . Conclui-se que

$$\phi(t, y) = y^2t + t^2y$$

é um potencial (há outros, que diferem deste numa constante). A solução geral da equação diferencial fica definida implicitamente pela equação

$$y^2t + t^2y = K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

O gráfico da solução do problema de valor inicial pretendido contém o ponto  $(1, y(1)) = (1, 1)$  logo a constante  $K$  correspondente à solução é  $K = \phi(1, 1) = 2$ .

Neste exemplo podemos resolver a equação anterior em ordem a  $y$  explicitamente usando a fórmula resolvente:

$$y^2t + t^2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y(t) = \frac{-t^2 \pm \sqrt{t^4 + 8t}}{2t}$$

Para que a condição  $y(1) = 1$  seja verificada temos que escolher a solução correspondente ao sinal + antes da raiz. Conclui-se finalmente que a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{-t^2 + \sqrt{t^4 + 8t}}{2t}.$$

**23.4. Equações redutíveis a exactas.** Uma equação diferencial da forma

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

diz-se *redutível a exacta*, se existe uma função não nula  $\mu(t, y)$  chamada um *factor integrante* tal que a equação equivalente

$$\mu(t, y)M(t, y) + \mu(t, y)N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

é uma equação exacta. Isto acontece sse se verifica a relação

$$(25) \quad \frac{\partial}{\partial y} (\mu(t, y)M(t, y)) = \frac{\partial}{\partial t} (\mu(t, y)N(t, y))$$

$$(26) \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} N + \mu \frac{\partial N}{\partial t}$$

que é uma equação para achar o factor integrante. Esta equação admite praticamente sempre solução mas só é prático achá-la quando o factor integrante  $\mu$  tem uma forma especial, por exemplo, se este depende apenas de uma das variáveis  $t$  ou  $y$ .

Se  $\mu$  depende apenas de  $t$ , a equação (25) simplifica-se, ficando

$$\mu(t) \frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = \mu'(t)N(t, y) + \mu(t) \frac{\partial N}{\partial t}(t, y)$$

ou, equivalentemente,

$$(27) \quad \mu' = \mu \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}.$$

Claro que a equação (27) tem solução se e só se a função

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t, y)}{N(t, y)}$$

depender apenas da variável  $t$ . Nesse caso, (27) pode ser resolvida para achar um factor integrante e, multiplicando a equação inicial pelo factor integrante obtemos uma equação exacta que já sabemos resolver.

Podemos deduzir da mesma maneira uma condição para a existência de um factor integrante que dependa apenas da variável  $y$ . Dada uma equação da forma  $M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$  que não seja exacta, deve procurar obter-se um factor integrante da forma  $\mu(t)$  ou  $\mu(y)$ . Por vezes poderá ser dada informação adicional que ajude a achar um factor integrante. Por exemplo pode sugerir-se a procura de um factor integrante da forma  $\mu(t + y)$  ou  $\mu(ty)$ . Substituindo na equação (25), obter-se-á então uma equação diferencial linear homogénea para a determinação de  $\mu$ .

**Exemplo 23.5.** Achar a solução geral da equação  $\frac{y^2}{2} + 2ye^t + (y + e^t) \frac{dy}{dt} = 0$ .

Uma vez que as derivadas cruzadas

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y^2}{2} + 2ye^t \right) = y + 2e^t \quad \frac{\partial}{\partial y} (y + e^t) = e^t$$

são diferentes, a equação não é exacta. Procuramos um factor integrante que dependa apenas de  $y$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu(y) \left( \frac{y^2}{2} + 2ye^t \right) \right) &= \frac{\partial}{\partial t} (\mu(y) (y + e^t)) \\ \mu'(y) \left( \frac{y^2}{2} + 2ye^t \right) + \mu(y) (y + 2e^t) &= \mu(y)e^t \\ \mu'(y) \left( \frac{y^2}{2} + 2ye^t \right) &= \mu(y) (-y - e^t) \\ \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} &= -\frac{1}{y} \frac{y + e^t}{\frac{y}{2} + 2e^t}\end{aligned}$$

A última equação é impossível porque a função do lado direito do sinal de igual não depende apenas de  $y$ . Não existe portanto um factor integrante que dependa apenas de  $y$ . Procuramos então um factor integrante que dependa apenas de  $t$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu(t) \left( \frac{y^2}{2} + 2ye^t \right) \right) &= \frac{\partial}{\partial t} (\mu(t) (y + e^t)) \\ \mu(t) (y + 2e^t) &= \mu'(t) (y + e^t) + \mu(t)e^t \\ \mu(t) (y + e^t) &= \mu'(t) (y + e^t) \\ \mu'(t) &= \mu(t)\end{aligned}$$

Conclui-se que  $\mu(t) = e^t$  é um factor integrante da equação. A equação equivalente

$$\frac{y^2}{2}e^t + 2ye^{2t} + (ye^t + e^{2t}) \frac{dy}{dt} = 0$$

que se obtém multiplicando pelo factor integrante é exacta. Um potencial é uma solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2}y^2e^t + 2ye^{2t} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = ye^t + e^{2t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi(t, y) = \frac{1}{2}y^2e^t + ye^{2t} + A(y) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = ye^t + e^{2t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi(t, y) = \frac{1}{2}y^2e^t + ye^{2t} + A(y) \\ ye^t + e^{2t} + A'(y) = ye^t + e^{2t} \end{cases}$$

Conclui-se que  $A'(y) = 0$ . Portanto  $\phi(t, y) = \frac{1}{2}y^2e^t + ye^{2t}$  é um potencial. A solução geral da equação é portanto definida pela expressão

$$\frac{1}{2}y^2e^t + ye^{2t} = K \Leftrightarrow y(t) = \frac{-e^{2t} \pm \sqrt{e^{4t} + 2Ke^t}}{e^t} = -e^t \pm \sqrt{e^{2t} + 2Ke^{-t}}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

## 24. CAMPOS DE DIREÇÕES E O MÉTODO DE EULER

**24.1. Interpretação geométrica da solução de uma EDO.** Consideremos uma equação diferencial da forma

$$(28) \quad \frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

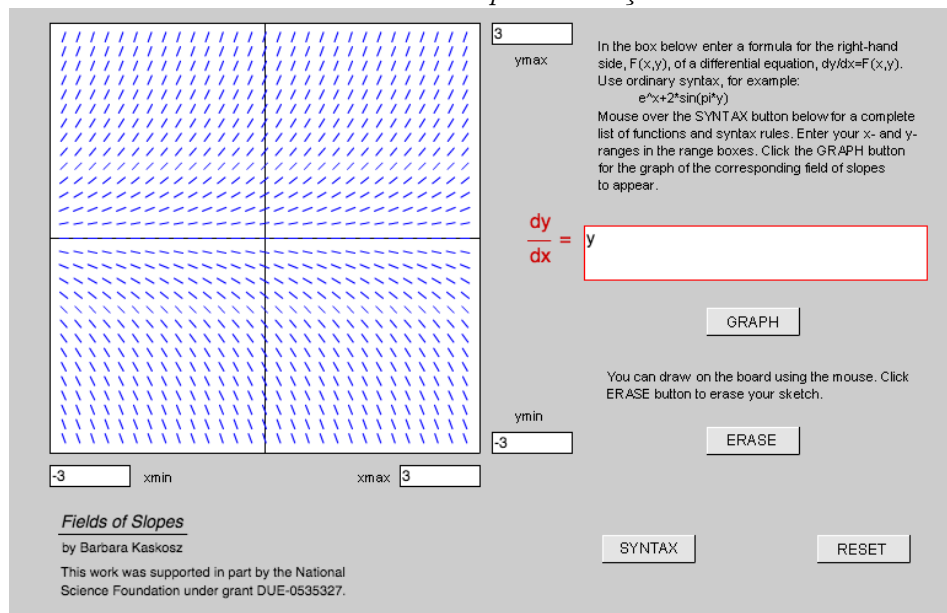
com  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Uma solução  $y(t)$  da equação anterior é representada geometricamente pelo seu gráfico, que é uma curva em  $\mathbb{R}^2$ . Uma vez que  $\frac{dy}{dt}$  é o declive da tangente ao gráfico

de  $y(t)$  no ponto  $(t, y(t))$ , a interpretação geométrica da equação (28) é a seguinte: A curva descrita por  $(t, y(t))$  é uma solução da equação diferencial (28) se e só se é tangente em cada ponto  $(t, y(t))$  à recta com declive  $f(t, y(t))$  que passa por esse ponto.

Esta interpretação permite-nos ter uma ideia qualitativa das soluções de uma equação diferencial mesmo que não as consigamos resolver explicitamente. O *campo de direções* da equação diferencial (28) é a função que associa a cada ponto  $(t, y)$  do plano a direção da recta com declive  $f(t, y)$ . Pode ser visualizado desenhando pequenas rectas com declive  $f(t, y)$  apoiadas no ponto  $(t, y)$  para um número suficientemente grande de pontos do plano. Usando o campo de direções podemos ficar com uma ideia do aspeto das soluções da equação diferencial: são curvas tangentes em todos os pontos ao campo de direções.

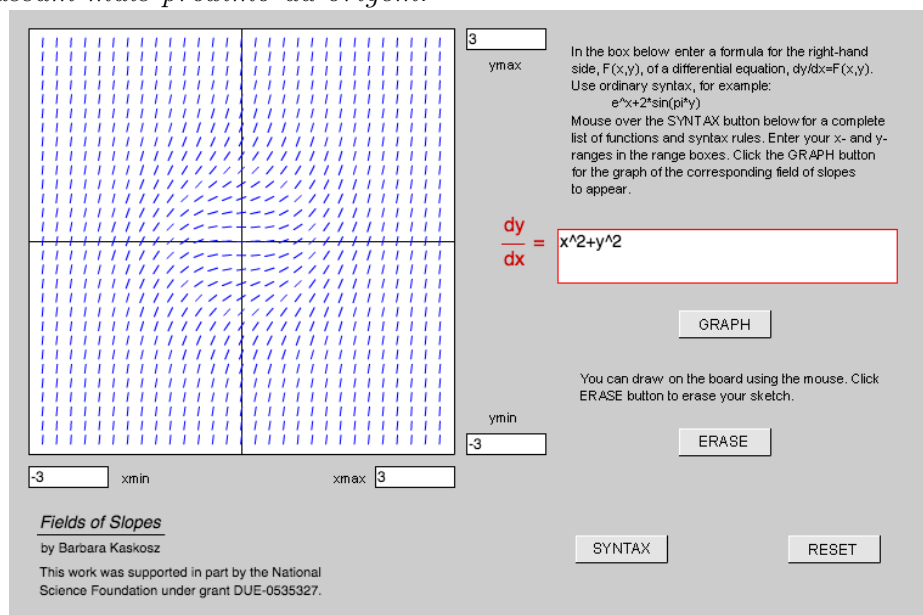
Podem encontrar aqui uma ligação para um [applet](#) que traça campos de direções. As imagens abaixo foram obtidas a partir desse applet. Os computadores traçam os campos de direções calculando o declive  $f(t, y)$  para pontos que formam uma grelha no plano  $(t, y)$ . Se tivermos que desenhar um campo de direções "à mão", esse método não é prático. Em vez disso podemos esboçar as curvas do plano onde as soluções passam com um dado declive  $C \in \mathbb{R}$  (que são definidas pela equação  $f(t, y) = C$ ) para alguns valores de  $C$  e desenhar pequenas rectas de declive  $C$  ao longo dessas curvas. procedendo desta forma para alguns poucos valores de  $C$  bem escolhidos deve dar uma boa ideia do campo de direções da equação diferencial em questão (e portanto do aspecto geral que têm as soluções da equação diferencial).

**Exemplo 24.2.** (1)  $\frac{dy}{dt} = y$ . Neste caso as soluções são fáceis de calcular, são as funções da forma  $y(t) = Ce^t$  com  $C \in \mathbb{R}$ . O formato dos gráficos destas soluções está claramente de acordo com o campo de direções mostrado abaixo.



(2)  $\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2$ . Não é possível resolver esta equação explicitamente mas o campo de direções apresentado abaixo dá-nos uma ideia bastante precisa do aspecto geral

das soluções. São funções crescentes com um ponto de inflexão no ponto em que passam mais próximo da origem.



**24.3. O método de Euler.** A interpretação geométrica descrita acima sugere um método simples para aproximar soluções de problemas de valor inicial que se chama o método de Euler.

Dada uma condição inicial  $(t_0, y_0)$ , a equação (28) diz-nos "em que direcção nos devemos mover", nomeadamente, a da recta com declive  $f(t_0, y_0)$ . Para valores de  $t$  próximos de  $t_0$ , a recta com declive  $f(t_0, y_0)$  que passa pelo ponto  $(t_0, y_0)$  é uma boa aproximação do gráfico da solução do problema de valor inicial. A equação dessa recta é

$$y = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0).$$

O método de Euler consiste em aproximar a solução do problema de valor inicial para  $t_0 \leq t \leq t_0 + h$  por esta recta. Se  $h$  for pequeno, o erro cometido por esta aproximação é pequeno. Podemos agora reiniciar o processo de aproximação com a nova condição inicial

$$t_1 = t_0 + h; \quad y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)h$$

Presumivelmente a solução do problema de valor inicial  $y(t_1) = y_1$  estará próxima da solução  $y(t)$  para  $t$  próximo de  $t_1$  (uma vez que  $y_1$  está próximo de  $y(t_1)$ ), e pode por sua vez ser aproximada pela recta que passa por  $(t_1, y_1)$  com declive  $f(t_1, y_1)$ . Esta recta tem equação

$$y = y_1 + f(t_1, y_1)(t - t_1).$$

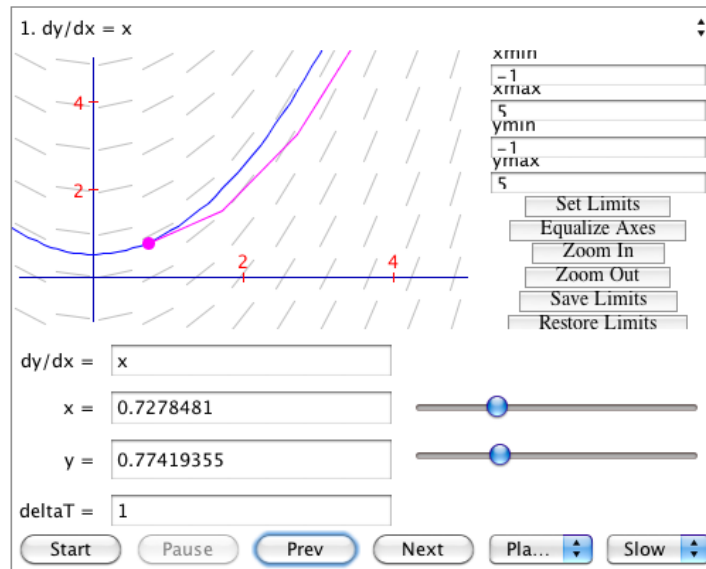
Continuando da mesma forma obtemos uma sucessão de pontos dados pelas expressões

$$t_n = t_{n-1} + h \quad (= t_0 + nh); \quad y_n = y_{n-1} + f(t_{n-1}, y_{n-1})h$$

E unindo pontos sucessivos por segmentos de recta obtemos uma aproximação da solução do problema de valor inicial com  $y(t_0) = y_0$ .

Prova-se (para funções  $f(t, y)$  em (28) contínuas) que à medida que  $h$  tende para 0, as aproximações descritas acima convergem (uniformemente) para uma solução do problema de valor inicial num intervalo  $[t_0, l]$  com  $l > t_0$ . Na realidade esta é uma maneira de provar a existência de solução para o problema de valor inicial quando  $f$  é contínua.

Podem encontrar aqui uma ligação para um [applet](#) que ilustra o método de Euler, como exemplificado na figura seguinte (o "passo"  $h$  do método é denotado no applet por  $\Delta T$ ).



## 25. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES DE EDOS

Vamos agora iniciar a discussão de alguns resultados gerais sobre equações diferenciais ordinárias. Até agora falámos apenas de equações escalares (isto é, equações para as quais a incógnita é uma função escalar de  $t$ ) mas a teoria desenvolve-se da mesma forma para equações vectoriais (ou seja sistemas de equações) e é essa a generalidade com que os resultados serão apresentados.

**Definição 25.1.** *Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem é uma equação da forma*

$$(29) \quad \frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$$

onde  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função com  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  aberto, e a incógnita  $y(t)$  é uma função  $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo.

Um problema de valor inicial consiste numa equação (29) juntamente com uma condição inicial  $(t_0, y_0) \in U$ . Uma solução do problema de valor inicial é uma função diferenciável  $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisfaz a relação (29) e  $y(t_0) = y_0$ , sendo  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo que contém  $t_0$  no interior.

**Exemplo 25.2.** Consideremos o sistema de equações diferenciais definido por

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \frac{y_1}{t+y_2} \\ \frac{dy_2}{dt} = y_2 + ty_1 \end{cases}$$

A incógnita é uma função vectorial  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  com  $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ . A função  $f$  que define o sistema de equações é

$$f(t, y) = f(t, y_1, y_2) = \left( \frac{y_1}{t+y_2}, y_2 + ty_1 \right)$$

Esta função só está definida para  $t+y_2 \neq 0$ , isto é, o seu domínio  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  é o conjunto

$$U = \{(t, y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : t + y_2 \neq 0\}.$$

**Nota 25.3.** A razão pela qual se requer que as soluções estejam definidas em intervalos é que, não sendo esse o caso, os problemas de valor inicial não terão em geral soluções únicas. Esta situação é aparente mesmo em exemplos muito simples.

**Exemplo 25.4.** As funções que satisfazem a equação diferencial  $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$  são as primitivas de  $\frac{1}{t}$ , ou seja,

$$y(t) = \begin{cases} \log t + K_1 & \text{se } t > 0 \\ \log(-t) + K_2 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

onde  $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$  são constantes reais arbitrárias (recorde-se que uma primitiva é única a menos de uma constante em cada intervalo do domínio).

Se não exigirmos que as soluções estejam definidas em intervalos, temos infinitas soluções para o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}; \quad y(1) = 0$$

De facto, a condição inicial determina a constante  $K_1$  mas a constante  $K_2$  permanece arbitrária. Temos assim as soluções

$$y(t) = \begin{cases} \log t & \text{se } t > 0 \\ \log(-t) + K_2 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

com  $K_2 \in \mathbb{R}$  arbitrário.

**Nota 25.5.** Se a função  $f(t, y)$  em (29) não é contínua, não podemos esperar que exista em geral uma solução (diferenciável) como se vê também em exemplos muito simples.

**Exemplo 25.6.** Considere-se a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = h(t)$$

com

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Uma solução da equação diferencial teria que satisfazer

$$y(t) = t + K_1 \text{ para } t > 0 \text{ e } y(t) = K_2 \text{ para } t < 0$$

para alguns  $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ . Podemos tornar uma tal função contínua fazendo  $K_1 = K_2$  mas é impossível escolher as constantes de modo a que a função  $y(t)$  seja diferenciável em 0. Conclui-se que a equação diferencial não tem soluções (diferenciáveis) definidas em  $\mathbb{R}$ .

Diga-se de passagem que funções  $f(t, y)$  descontínuas ocorrem por vezes nas aplicações e, por essa razão, estudam-se também soluções "generalizadas" de equações diferenciais que não são necessariamente funções diferenciáveis. Daqui a algumas semanas veremos alguns exemplos de soluções generalizadas.

O Teorema seguinte é um dos resultados fundamentais sobre equações diferenciais ordinárias.

**Teorema 25.7** (Teorema de Existência de Peano). *Seja  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua. Então para toda a condição inicial  $(t_0, y_0) \in U$ , o problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y); \quad y(t_0) = y_0$$

tem uma solução  $y(t)$  definida num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  contendo  $t_0$  no seu interior.

Se interpretarmos uma equação diferencial fisicamente como uma lei regulando a evolução de uma partícula, a equação (29) diz-nos em função da posição instantânea da partícula, em que direção e com que velocidade nos devemos mover. Parece razoável que essa informação seja suficiente para determinar a evolução da partícula, mas assumindo apenas continuidade de  $f(t, y)$  não é esse o caso! Um problema de valor inicial satisfazendo as condições do Teorema de Peano pode ter infinitas soluções como vemos no seguinte exemplo simples.

**Exemplo 25.8.** *Determinar as soluções do problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dt} = 2\sqrt{|y|}; \quad y(1) = 1.$$

A função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(t, y) = \sqrt{|y|}$  é contínua, portanto o Teorema de Peano garante a existência de solução para o problema de valor inicial. A equação é separável pelo que podemos determinar as soluções. Para integrar uma função que envolve  $|y|$  é conveniente separar nos dois caso  $y > 0$  e  $y < 0$ .

Para  $y > 0$  temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 2\sqrt{y} \\ \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dt} &= 1 \\ \frac{d}{dt} \left( y^{\frac{1}{2}} \right) &= 1 \\ y^{\frac{1}{2}} &= t + K, \quad K \in \mathbb{R} \\ y(t) &= (t + K)^2, \quad K \in \mathbb{R} \text{ e } t + K > 0 \end{aligned}$$



(a condição  $t + K > 0$  deve-se ao facto de, na equação anterior,  $y^{\frac{1}{2}}$  ser necessariamente um número positivo).

Da mesma forma, para  $y < 0$  temos,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 2\sqrt{-y} \\ \frac{1}{2}(-y)^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dt} &= 1 \\ -\frac{d}{dt}\left((-y)^{\frac{1}{2}}\right) &= 1 \\ (-y)^{\frac{1}{2}} &= -t + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ y(t) &= -(C - t)^2, \quad K \in \mathbb{R} \text{ e } -t + C > 0 \Leftrightarrow t < C\end{aligned}$$

Por outro lado, substituindo na equação vemos que  $y(t) = 0$  é uma solução da equação diferencial. Uma vez que as soluções para  $y > 0$  e  $y < 0$  (cujos gráficos são arcos de parábola com vértice em  $-K$  e  $C$  respectivamente) se aproximam do eixo  $y = 0$  com a derivada a tender para 0, podemos "colar" soluções de diferentes tipos para obter soluções definidas em  $\mathbb{R}$ . Obtemos assim as seguintes infinitas soluções para o problema de valor inicial  $y(1) = 1$ :

$$y(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } C < t \leq 0, \\ -(C - t)^2 & \text{se } t \leq C \end{cases}$$

com  $C \in [-\infty, 0]$ .

No exemplo anterior, é claro que a unicidade "falha em  $y = 0$ ", onde a função  $f(t, y) = \sqrt{|y|}$  não é diferenciável. O resultado que apresentamos a seguir garante a unicidade de soluções de (29) desde que a função  $f(t, y)$  seja suficientemente regular. É o resultado fundamental relativo à existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias.

Note-se que a questão da unicidade das soluções não é meramente teórica. As equações diferenciais são usadas para modelar a evolução de sistemas no tempo. Se um problema de valor inicial admite infinitas soluções, a utilidade da equação diferencial para prever o comportamento futuro do sistema desaparece. A unicidade pode também ser utilizada para obter informação qualitativa sobre as soluções de uma equação diferencial como veremos em seguida.

**Teorema 25.9** (Teorema de Picard). *Seja  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  um aberto. Escrevendo  $(t, y) \in U$  para os elementos de  $U$ , seja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua tal que as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial y_i}$  existem e são contínuas. Então para todo o compacto  $K \subset U$  existe  $\epsilon > 0$  tal que, para toda a condição inicial  $(t_0, y_0) \in K$ , o problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y); \quad y(t_0) = y_0$$

*tem uma solução única  $y(t)$  em qualquer intervalo contido em  $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[ \subset \mathbb{R}$ .*

O enunciado do Teorema de Picard garante a unicidade de solução perto da condição inicial, mas relaciona também os intervalos onde estão definidas as soluções de problemas de valor inicial com condições iniciais "próximas". Este último aspecto é importante para entender o prolongamento de soluções e o comportamento destas para valores de  $t$  longe do instante inicial  $t_0$ , como veremos mais tarde.

**Nota 25.10.** *Tipicamente verifica-se as condições do Teorema de Picard vendo que a função  $f$  é de classe  $C^1$ , isto é, vendo que as derivadas parciais de  $f$  em ordem a  $t$  e  $y$  existem e são contínuas.*

**Nota 25.11.** *Para que a conclusão do Teorema de Picard seja válida basta que a função  $f(t, y)$  seja contínua e localmente Lipschitziana na variável  $y$ . Isto significa que para cada compacto  $K \subset U$ , existe uma constante  $L_K > 0$  tal que*

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L_K \|y_1 - y_2\|$$

para todos os  $(t, y_1)$  e  $(t, y_2)$  em  $K$ . É assim que o Teorema de Picard aparece normalmente enunciado nos livros de Equações Diferenciais. É fácil ver (usando o Teorema do Valor médio de Cálculo 2) que uma função contínua com derivadas parciais em ordem a  $y$  contínuas é localmente Lipschitziana na variável  $y$ .

Vejamos um primeiro exemplo simples de como extrair informação qualitativa sobre as soluções de uma equação diferencial usando o Teorema de Picard.

**Exemplo 25.12.** *Considere-se o problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y(1-y)e^{ty}}{\sin^2(ty^3) + e^{t+y}}; \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

A função

$$f(t, y) = \frac{y(1-y)e^{ty}}{\sin^2(ty^3) + e^{t+y}}$$

é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ , logo o Teorema de Picard garante que o problema de valor inicial tem solução única. É impossível resolver esta equação diferencial explicitamente, mas apesar disso, o Teorema de Picard permite-nos concluir que a solução do problema de valor inicial satisfaz

$$0 < y(t) < 1 \text{ para todo o } t$$

De facto, é imediato verificar que  $y(t) = 0$  e  $y(t) = 1$  são soluções (constantes) da equação diferencial. Geometricamente, a unicidade de solução traduz-se na impossibilidade de os gráficos de soluções distintas se tocarem. Uma vez que a condição inicial  $(0, \frac{1}{2})$  está entre as linhas horizontais  $y = 0$  e  $y = 1$  (que são os gráficos das soluções constantes), o mesmo terá que acontecer com o gráfico da solução do problema de valor inicial.

Podemos também argumentar mais formalmente da seguinte forma. Suponhamos que para algum  $t > 0$  a solução  $y(t)$  do problema de valor inicial em causa satisfazia  $y(t) \geq 1$ . Então teria que existir (exercício) o mínimo  $m$  dos  $t > 0$  para os quais  $y(t) = 1$ . Mas então a condição inicial  $(m, 1)$  teria pelo menos duas soluções distintas numa vizinhança de  $m$ : a solução  $y(t)$  e a solução constante igual a 1.

Apesar de não irmos ver a demonstração dos Teoremas de Peano e Picard, vamos explicar por alto a ideia da demonstração uma vez que se trata de uma ideia muito importante em Matemática (que voltarão a ver na cadeira de Matemática Computacional).

Se  $g: A \rightarrow A$  é uma função, um elemento  $x \in A$  diz-se um *ponto fixo* de  $g$  se  $g(x) = x$ . Esta terminologia justifica-se pensando em  $g$  como uma transformação que "move os pontos de  $A$ ". Um ponto fixo é um ponto que " $g$  não move". Uma técnica básica de resolução de equações (de qualquer tipo) em Matemática é escrever a equação em causa de tal forma que uma solução corresponda precisamente ao ponto fixo de uma função  $g$ . Veremos em breve um exemplo.

A razão porque isto é útil é que há um método geral para tentar aproximar pontos fixos, nomeadamente, a aplicação *iterada* de  $g$ . De facto seja  $a \in A$  um ponto qualquer. Podemos formar uma sucessão em  $A$  aplicando  $g$  repetidamente:

$$a, g(a), g(g(a)) = g^2(a), \dots, g^n(a), \dots$$

Se conseguirmos ver que esta sucessão converge<sup>6</sup> (ou mesmo que tem uma sub-sucessão convergente) e se  $g$  for contínua, o limite tem necessariamente que ser um ponto fixo:

$$g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(a)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(g^n(a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} g^{n+1}(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} g^n(a).$$

É implementando esta estratégia para a equação (29) que se provam os Teoremas de Peano e de Picard. Vamos apenas mostrar como ver as soluções de (29) como pontos fixos e apresentar um exemplo simples.

O problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y); \quad y(t_0) = y_0$$

é equivalente à seguinte equação que se obtém integrando de  $t_0$  a  $t$

$$(30) \quad y(t) - y_0 = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \Leftrightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

De facto, se  $y(t)$  satisfaz (30) então substituindo  $t = t_0$  obtemos a condição inicial e derivando em ordem a  $t$  vemos que  $y(t)$  satisfaz a equação diferencial.

Mas a equação (30) exhibe a solução  $y$  como um ponto fixo! Podemos considerar o conjunto

$$A = \{h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : h \text{ é contínua e } h(t_0) = y_0\}$$

e o *operador de Picard*  $T: A \rightarrow A$  definido por

$$(T(h))(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, h(s)) ds.$$

A equação (30) pode então escrever-se

$$y = T(y)$$

---

<sup>6</sup>Claro que para isso  $A$  tem que ser um conjunto onde se possa definir convergência de sucessões.

e portanto uma solução do problema de valor inicial é exactamente o mesmo que um ponto fixo de  $T$ .

Os Teoremas de Peano e de Picard podem mostrar-se vendo que a sucessão das iteradas de Picard (ou uma sua subsucessão no caso do Teorema de Peano) converge. No caso do Teorema de Picard é ainda necessário verificar que o ponto fixo do operador de Picard é único, o que não é difícil.

**Exemplo 25.13.** *Consideremos o problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dt} = y; \quad y(0) = 1$$

(que tem solução  $y(t) = e^t$ ). A função que define a equação diferencial é  $f(t, y) = y$  e portanto o operador de Picard para esta equação, definido para funções contínuas  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $h(0) = 1$  é dado pela expressão

$$(T(h))(t) = h(0) + \int_0^t h(s) ds.$$

Vamos calcular as primeiras iteradas de Picard começando com a função constante  $y_0(t) = 1$  (que satisfaz a condição inicial, mas obviamente não satisfaz a equação diferencial). Temos

$$y_1(t) = (Ty_0)(t) = 1 + \int_0^t 1 ds = 1 + t$$

$$y_2(t) = (Ty_1)(t) = 1 + \int_0^t (1 + s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$$y_3(t) = (Ty_2)(t) = 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}$$

Vemos assim que a  $n$ -ésima iterada de Picard produz o polinómio de MacLaurin de grau  $n$  da solução  $y(t)$ . Em particular  $y_n$  converge para a solução  $y(t) = e^t$  (a convergência é até uniforme em qualquer intervalo limitado de  $\mathbb{R}$ ).

## 26. PROLONGAMENTO DE SOLUÇÕES A INTERVALOS MÁXIMOS

O Teorema de Picard dá existência e unicidade de soluções locais para problemas de valor inicial (no sentido em que garante a existência e unicidade de soluções definidas numa vizinhança do instante inicial). É no entanto fácil de deduzir a partir do Teorema de Picard que as soluções podem ser prolongadas de forma única a intervalos máximos em cujas extremidades a equação deixa de ter significado.

**Teorema 26.1** (Prolongamento de soluções a intervalos máximos). *Seja  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua satisfazendo as hipóteses do Teorema de Picard. Dada uma condição inicial  $(t_0, y_0) \in U$ , a solução local do problema de valor inicial pode ser prolongada de forma única a um intervalo máximo  $I_{max} = ]t_{min}, t_{max}[$  com*

$$-\infty \leq t_{min} < t_0 < t_{max} \leq +\infty$$

de tal maneira que quando  $t \rightarrow t_{\min}^+$  ou  $t \rightarrow t_{\max}^-$  se tem, ou

1.  $\|(t, y(t))\| \rightarrow \infty$ , ou
2.  $(t, y(t))$  tende para a fronteira de  $U$ .

*Dem.* Exercício. A dificuldade está em perceber bem o enunciado do Teorema de Picard, e em particular como ele implica que podemos ir sempre prolongando de forma única a solução de um problema de valor inicial até que 1. ou 2. acontece.  $\square$

O intervalo máximo da solução de um problema de valor inicial é uma característica da solução e deve ser indicado sempre que possível. Quando dispomos de uma fórmula explícita para a solução é muito fácil encontrar o intervalo máximo - é simplesmente o maior intervalo contido no domínio de diferenciabilidade da solução que contém o instante inicial.

**Definição 26.2.** Quando se verifica a condição 1. do Teorema 26.1 com  $t$  limitado, isto é, quando  $y(t) \rightarrow \infty$  com  $t$  limitado, diz-se que a solução explode.

**Nota 26.3.** A terminologia da definição anterior é justificada pensando no caso em que  $y(t)$  modela a evolução no tempo do volume dos reagentes de uma reação química. Uma explosão no instante  $t_1$  seria precisamente modelada por  $\lim_{t \rightarrow t_1} y(t) = +\infty$ .

**Exemplo 26.4.** Consideremos o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y^2; \quad y(0) = 1$$

Trata-se de uma equação separável:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} &= 1 \\ \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{y} \right) &= 1 \end{aligned}$$

Integrando de 0 a  $t$  obtemos

$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(0)} = t \Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{1-t}.$$

O intervalo máximo desta solução é o maior intervalo contido no domínio que contém o instante inicial:

$$I_{\max} = ] -\infty, 1[.$$

Neste exemplo a função  $f(t, y)$  que define a equação é  $f(t, y) = y^2$ , que está definida em  $U = \mathbb{R}^2$  pelo que nunca se pode verificar a condição 2. no Teorema 26.1 (a fronteira de  $U$  é vazia). Quando  $t \rightarrow t_{\min} = -\infty$  temos  $\|(t, y(t))\| \rightarrow \infty$  porque  $t \rightarrow \infty$  ( $y(t)$  tende para 0). Em  $t_{\max} = 1$  a solução explode.

**Exemplo 26.5.** Consideremos o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{y}}; \quad y(1) = 1$$

A função  $f(t, y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$  está definida em  $U = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ . A equação é separável e portanto pode ser resolvida pelo método usual:

$$\begin{aligned}\sqrt{y} \frac{dy}{dt} &= 1 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right) &= 1\end{aligned}$$

Integrando de 1 a  $t$  temos

$$\frac{2}{3} \left( y^{\frac{3}{2}}(t) - 1 \right) = t - 1 \Leftrightarrow y(t) = \left( \frac{3t - 1}{2} \right)^{\frac{2}{3}}$$

O intervalo máximo de definição é o maior intervalo contido no domínio de diferenciabilidade de  $y(t)$ , que é

$$I_{max} = \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$$

Quando  $t \rightarrow \frac{1}{3}^+$  temos  $(t, y(t)) \rightarrow \left(\frac{1}{3}, 0\right)$  que é um ponto na fronteira de  $U$ . Estamos portanto no caso 2. do Teorema 26.1. Quando  $t \rightarrow t_{max} = +\infty$  tanto  $t$  como  $y(t)$  tendem para infinito e portanto ocorre a hipótese 1.

## 27. COMPARAÇÃO DE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Vamos agora ver como usando os teoremas gerais estudados nas últimas aulas podemos obter informação qualitativa relevante sobre soluções de equações que não conseguimos resolver explicitamente. A ideia básica é comparar a equação em questão com outras mais simples que conseguimos resolver. Uma comparação adequada permite-nos por vezes estimar o intervalo máximo de definição de uma solução (que não sabemos achar mas cuja existência é garantida pelo Teorema de Picard) ou ver se a solução em questão explode.

**Proposição 27.1** (Comparação de soluções para tempo positivo). *Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  e  $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$  funções satisfazendo as hipóteses do Teorema de Picard. Sejam  $y(t)$  e  $z(t)$  as soluções dos problemas de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} = g(t, z) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

Se  $y_0 \leq z_0$  e  $f(t, y) \leq g(t, y)$  para  $(t, y) \in U$  e  $t \geq t_0$ , então

$$y(t) \leq z(t) \text{ para todo } t \geq t_0$$

(na interseção dos intervalos de definição das soluções  $y(t)$  e  $z(t)$ )

O slogan para o resultado anterior é: "Se  $y(t)$  começa por debaixo de  $z(t)$  (isto é,  $y_0 \leq z_0$ ) e cresce mais devagar (isto é,  $f \leq g$ ) então  $y(t)$  continua sempre a estar por debaixo de  $z(t)$ ". Este slogan não descreve rigorosamente a situação porque não é necessariamente verdade que a solução  $y(t)$  esteja a crescer sempre mais devagar que  $z(t)$  - as taxas de crescimento no instante  $t$  são  $f(t, y(t))$  e  $g(t, z(t))$  respectivamente e não temos garantia que  $f(t, y(t)) \leq g(t, z(t))$  a não ser que  $y(t) = z(t)$ . De qualquer forma o slogan parece-nos

uma boa maneira de descrever (em primeira aproximação) o resultado da Proposição 27.1 (e acima de tudo, de o recordar).

*Ideia da Demonstração.* Vamos apenas explicar o caso mais simples em que as desigualdades para a condição inicial e as funções que definem as equações diferenciais são estritas, isto é, em que  $y_0 < z_0$  e  $f(t, y) < g(t, y)$  para  $t \geq t_0$ . Neste caso a conclusão da Proposição é também uma desigualdade estrita:  $y(t) < z(t)$  para  $t \geq t_0$ . O caso geral deduz-se deste por passagem ao limite mas a falta de detalhe do nosso estudo das equações diferenciais não permite tratar com rigor esta passagem ao limite.

Suponhamos por absurdo que existe  $t > t_0$  tal que  $y(t) \geq z(t)$  e seja

$$t_1 = \min\{t > t_0 : y(t) = z(t)\}$$

(a existência deste mínimo fica como exercício). Então temos

$$y(t_1) = z(t_1) \quad \text{e} \quad y'(t_1) = f(t_1, y(t_1)) < g(t_1, y(t_1)) = g(t_1, z(t_1)) = z'(t_1).$$

Isto implica que, para  $t < t_1$ , a recta de equação  $y(t_1) + y'(t_1)(t - t_1)$ , tangente ao gráfico de  $y(t)$  em  $(t_1, y(t_1))$  está acima da recta tangente ao gráfico de  $z(t)$  no mesmo ponto. Mas então existe  $t < t_1$  tal que  $y(t) > z(t)$ , o que contradiz a definição de  $t_1$ .  $\square$

**Exemplo 27.2.** *Considere-se o problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\text{sen}(ty)}{e^{\cos(t+y)} + t^2}, \quad y(1) = 1.$$

A função  $f(t, y) = \frac{\text{sen}(ty)}{e^{\cos(t+y)} + t^2}$  está definida e é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ , logo o Teorema de Picard garante que o problema de valor inicial tem solução única e o Teorema 26.1 garante que esta pode ser prolongada de forma única a um intervalo máximo em cujos extremos  $\|(t, y(t))\| \rightarrow \infty$  (a opção 2. no Teorema 26.1 não pode ocorrer pois o domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}^2$ ).

É fácil comparar a função  $f(t, y)$  com outras funções mais simples:

$$|f(t, y)| = \frac{|\text{sen}(ty)|}{e^{\cos(t+y)} + t^2} \leq \frac{1}{e^{-1} + 0} = e$$

ou seja

$$-e \leq f(t, y) \leq e \quad \text{para todos os } (t, y)$$

As soluções dos problemas de valor inicial

$$\frac{dw}{dt} = -e, \quad w(1) = 1; \quad \frac{dz}{dt} = e, \quad z(1) = 1$$

são

$$w(t) = 1 - e(t - 1) \quad \text{e} \quad z(t) = 1 + e(t - 1)$$

respectivamente, logo a Proposição 27.1 garante que

$$1 - e(t - 1) \leq y(t) \leq 1 + e(t - 1) \quad \text{para todo o } t \geq 1.$$

Em particular, o gráfico de  $y(t)$  não pode ter uma assíntota vertical (isto é  $y(t)$  não pode explodir) para  $t \geq 1$  e portanto o extremo superior do intervalo de definição da solução é  $t_{\max} = +\infty$ .

**Exemplo 27.3.** *Considere-se o problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dt} = e^y + \operatorname{sen}^2(ty), \quad y(0) = 0.$$

A função  $f(t, y) = e^y + \operatorname{sen}^2(ty)$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ , logo o Teorema de Picard garante que o problema de valor inicial tem solução única e o Teorema 26.1 garante que esta pode ser prolongada de forma única a um intervalo máximo em cujos extremos  $\|(t, y(t))\| \rightarrow \infty$ .

Como

$$f(t, y) \geq e^y$$

a solução  $y(t)$  é maior ou igual à solução do problema de valor inicial

$$\frac{dw}{dt} = e^w, \quad w(0) = 0$$

para todo o  $t \geq 0$ . Temos

$$e^{-w} \frac{dw}{dt} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (-e^{-w}) = 1$$

e integrando de 0 a  $t$  obtemos

$$-e^{-w(t)} + e^{w(0)} = t \Leftrightarrow w(t) = -\log(1 - t).$$

Assim,

$$y(t) \geq -\log(1 - t) \text{ para } t \geq 0.$$

Uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow 1} -\log(1 - t) = +\infty$$

conclui-se que  $y(t)$  explode antes de  $t = 1$ . Mais precisamente,  $y(t)$  tem que tender para  $+\infty$  no extremo superior  $t_{\max}$  do seu intervalo de definição e  $0 < t_{\max} \leq 1$ .

**Proposição 27.4** (Comparação de soluções para tempo negativo). *Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  e  $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$  funções satisfazendo as hipóteses do Teorema de Picard. Sejam  $y(t)$  e  $z(t)$  as soluções dos problemas de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} = g(t, z) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

Se  $y_0 \leq z_0$  e  $f(t, y) \geq g(t, y)$  para  $(t, y) \in U$  e  $t \leq t_0$ , então

$$y(t) \leq z(t) \text{ para todo o } t \leq t_0$$

(na interseção dos intervalos de definição das soluções  $y(t)$  e  $z(t)$ )

O slogan para o resultado anterior é: "Se  $y(t)$  acaba por debaixo de  $z(t)$  (isto é,  $y_0 \leq z_0$ ) e vinha a crescer mais depressa (isto é  $f \geq g$ ) então  $y(t)$  esteve sempre por debaixo de  $z(t)$ ". Tal como no caso da Proposição 27.1, este slogan não descreve rigorosamente a situação da Proposição 27.4 mas é uma maneira conveniente de a recordar. A demonstração da Proposição 27.4 é inteiramente análoga à da Proposição 27.1. Alternativamente 27.4 pode ser deduzida de 27.1 fazendo a mudança de variável  $t \rightarrow -t$  (exercício).



**Exemplo 27.5.** Consideremos novamente o problema de valor inicial do Exemplo 27.2

$$(31) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\text{sen}(ty)}{e^{\cos(t+y)} + t^2}, \quad y(1) = 1.$$

Já vimos que

$$-e \leq f(t, y) \leq e \quad \text{para todos os } (t, y) \in \mathbb{R}^2$$

Da Proposição 27.4 vem agora que as soluções dos problemas de valor inicial

$$\frac{dw}{dt} = -e, \quad w(1) = 1; \quad \frac{dz}{dt} = e, \quad z(1) = 1,$$

que são

$$w(t) = 1 - e(t - 1) \quad e \quad z(t) = 1 + e(t - 1)$$

satisfazem

$$1 - e(t - 1) \geq y(t) \geq 1 + e(t - 1) \quad \text{para todo o } t \leq 1.$$

(as desigualdades invertem-se para tempo negativo). Em particular, o gráfico de  $y(t)$  não pode ter uma assíntota vertical (isto é  $y(t)$  não pode explodir) para  $t \leq 1$  e portanto o extremo inferior do intervalo de definição da solução é  $t_{\min} = -\infty$ . Juntamente com o Exemplo 27.2 concluímos assim que a solução de (31) (que não sabemos determinar explicitamente) nunca explode e tem portanto intervalo máximo de definição  $\mathbb{R}$ .

**Proposição 27.6** (Comparação de soluções para sistemas). Seja  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^2$  um aberto,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g: V \rightarrow \mathbb{R}$  funções satisfazendo as hipóteses do Teorema de Picard e consideremos os problemas de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} = g(t, z) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

Se  $\|y_0\| \leq z_0$  e  $\|f(t, y)\| \leq g(t, \|y\|)$  para  $(t, y) \in U$  e  $t \geq t_0$ , então

$$\|y(t)\| \leq z(t) \quad \text{para todo o } t \geq t_0$$

(na interseção dos intervalos de definição das soluções  $y(t)$  e  $z(t)$ )

Pensando em  $y(t)$  como a posição de uma partícula, a quantidade  $\|f(t, y)\|$  é a magnitude da velocidade instantânea da partícula. A taxa de crescimento de  $\|y\|$  é necessariamente menor ou igual a  $\|f(t, y)\|$  (só é igual se a partícula se estiver a afastar radialmente da origem nesse instante) logo a condição  $\|f\| \leq g$  na Proposição 27.6 garante que a "taxa de crescimento de  $\|y\|$  é menor ou igual à de  $z$ " (pelo menos é esse o slogan).

Com um pouco mais de detalhe, calculemos  $\frac{d}{dt}(\|y(t)\|)$  (para  $y(t) \neq 0$ ). Para simplificar a notação vamos fazer a conta para o caso em que o número  $n$  de componentes é 2 mas o

caso geral é igual:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|y(t)\|) &= \frac{d}{dt} (y_1(t)^2 + y_2(t)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (y_1(t)^2 + y_2(t)^2)^{-\frac{1}{2}} (2y_1(t)y_1'(t) + 2y_2(t)y_2'(t)) \\ &= \frac{1}{\|y(t)\|} \langle (y_1(t), y_2(t)), (y_1'(t), y_2'(t)) \rangle \\ &= \left\langle \frac{y(t)}{\|y(t)\|}, y'(t) \right\rangle \end{aligned}$$

O vector  $\frac{y}{\|y\|}$  é um versor radial, portanto o cálculo acima diz que a taxa de crescimento de  $\|y(t)\|$  é a componente radial da velocidade instantânea  $y'(t) = f(t, y(t))$ . Nas condições da Proposição 27.6 temos portanto (para  $y(t) \neq 0$ )

$$\frac{d}{dt} (\|y(t)\|) \leq \|y'(t)\| = \|f(t, y(t))\| \leq g(t, \|y(t)\|)$$

e, tal como na demonstração da Proposição 27.1, isto implica então que  $\|y(t)\| \leq z(t)$  para  $t \geq t_0$ .

**27.7. Caos.** Nas últimas aulas vimos vários resultados qualitativos sobre (sistemas de) equações diferenciais ordinárias, relativos a existência e unicidade de solução, intervalo de definição das soluções e explosão ou não destas. Uma outra questão qualitativa de grande importância é a da dependência das condições iniciais. Prova-se que se a função  $f(t, y)$  satisfaz as condições do Teorema de Picard, as soluções do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

dependem continuamente da condição inicial  $(t_0, y_0)$ . O significado preciso desta afirmação é o seguinte: se escrevermos  $y(t; t_0, y_0)$  para o valor da solução do problema de valor inicial com condição inicial  $y(t_0) = y_0$ , a função

$$(t, t_0, y_0) \mapsto y(t; t_0, y_0)$$

é contínua no seu domínio. Acontece porém que esta dependência é, frequentemente, mesmo em equações diferenciais relativamente simples, extremamente sensível. Quer isto dizer que variações muito pequenas na condição inicial podem num curto prazo de tempo vir a ter efeitos muito significativos no valor da solução. Quando isto acontece diz-se que o sistema em causa é *caótico*. Uma vez que ao usar uma equação diferencial como modelo de um fenómeno físico as condições iniciais são determinadas através de medições, que têm sempre um intervalo de erro associado, é fácil perceber que se um sistema é caótico, é essencialmente impossível prever a evolução do sistema a longo prazo. No entanto é muitas vezes possível obter informação qualitativa, de cariz probabilístico, sobre o comportamento de sistemas caóticos. Esta é uma área de investigação em Matemática na qual há grande actividade hoje em dia. Recomenda-se a todos os alunos interessados a visualização deste [espetacular filme sobre caos](#) (realizado por uma equipa dirigida por Étienne Ghys). O

capítulo 7 do filme, sobre o atrator de Lorenz, que ilustra o comportamento caótico de um modelo meteorológico simplificado é particularmente recomendado.

## 28. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Os sistemas lineares da forma

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + b(t)$$

são uma classe extremamente importante de equações diferenciais. Por um lado são suficientemente simples para que se possa muitas vezes obter informação detalhada sobre as soluções, e por outro são frequentemente usadas para aproximar outras equações mais complicadas.

O conjunto das matrizes  $n \times n$  reais,  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  identifica-se com o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{n^2}$  da forma óbvia. Usando esta identificação fica definida a continuidade e diferenciabilidade de funções com valores matriciais.

**Proposição 28.1.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto e  $A: I \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , e  $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções contínuas. As soluções de problemas de valor inicial para o sistema linear*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + b(t)$$

*existem, são únicas e têm  $I$  como intervalo máximo de definição (isto é, as soluções não explodem em pontos interiores ao intervalo  $I$ ).*

*Dem.* A função  $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $f(t, y) = A(t)y + b(t)$  é claramente contínua e tem derivadas parciais contínuas em ordem às variáveis  $y_i$ . Os Teoremas de Picard e 26.1 garantem portanto que cada problema de valor inicial tem solução única que pode ser prolongada a um intervalo máximo de definição.

Dado  $t_0 \in I$ , vamos usar a Proposição 27.6 para mostrar que a solução de um problema de valor inicial com  $y(t_0) = y_0$  está definida em  $[t_0, +\infty[ \cap I$ . Fica como exercício a demonstração que  $]-\infty, t_0] \cap I$  está também contido no intervalo máximo de definição.

Seja  $t_1 \geq t_0$  tal que  $[t_0, t_1] \subset I$ . Uma vez que as componentes  $a_{ij}(t)$  e  $b_i(t)$  das funções  $A(t)$  e  $b(t)$  são contínuas, existe um número  $M$  que majora em módulo todas estas funções no intervalo  $[t_0, t_1]$ . Podemos por exemplo tomar

$$M = \max\{|a_{ij}(t)|, |b_i(t)| : 1 \leq i, j \leq n, t \in [t_0, t_1]\}.$$

A  $i$ -ésima componente de  $f(t, y) = A(t)y + b(t)$  é definida pela expressão

$$a_{1i}(t)y_1 + a_{2i}(t)y_2 + \dots + a_{ni}(t)y_n + b_i(t)$$

que, em módulo, pela desigualdade triangular, é menor ou igual a

$$M|y_1| + M|y_2| + \dots + M|y_n| + M \leq M\|y\| + M\|y\| + \dots + M\|y\| + M = M(n\|y\| + 1)$$

Conclui-se que

$$\|f(t, y)\| \leq M(n\|y\| + 1)\|(1, 1, \dots, 1)\| = M(n\|y\| + 1)\sqrt{n} = Mn\sqrt{n}\|y\| + M\sqrt{n}.$$

Escrevendo  $g(t, z) = Mn\sqrt{n}z + M\sqrt{n}$  conclui-se que

$$\|f(t, y)\| \leq g(t, \|y\|) \text{ para } t \in [t_0, t_1]$$

e portanto, se  $z(t)$  for a solução do problema de valor inicial

$$(32) \quad \frac{dz}{dt} = Mn\sqrt{n}z + M\sqrt{n}, \quad z(t_0) = \|y_0\|$$

a Proposição 27.6 diz-nos que

$$\|y(t)\| \leq z(t) \quad \text{para } t_0 \leq t \leq t_1.$$

Uma vez que a solução  $z(t)$  do problema de valor inicial (32) está definida em  $\mathbb{R}$  (fica como exercício achar  $z(t)$  explicitamente usando o método explicado na Secção 22), conclui-se que  $y(t)$  não explode no intervalo  $[t_0, t_1]$ .

Uma vez que  $t_1$  é um ponto arbitrário de  $[t_0, +\infty[ \cap I$ , conclui-se que  $y(t)$  não explode em nenhum instante  $t \in I$  tal que  $t \geq t_0$ .  $\square$

## 29. SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS

A Proposição 28.1 anterior é um dos resultados básicos sobre sistemas de equações lineares. Tem como consequência o seguinte resultado que é ainda mais importante e que é usado de forma fundamental na resolução dos sistemas de equações lineares.

**Corolário 29.1.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto e  $A: I \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$  uma função contínua. O conjunto das soluções do sistema linear homogêneo*

$$(33) \quad \frac{dy}{dt} = A(t)y$$

*é um espaço vectorial de dimensão  $n$ .*

*Dem.* De acordo com a Proposição 28.1 as soluções de (33) estão definidas em  $I$ . O conjunto das funções  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um espaço vectorial com a soma e o produto por escalar definidos da forma evidente. É imediato verificar que o conjunto das soluções da equação (33) é um subespaço vectorial: dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e soluções  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  de (33) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha y_1 + \beta y_2) &= \alpha \frac{dy_1}{dt} + \beta \frac{dy_2}{dt} \\ &= \alpha A(t)y_1 + \beta A(t)y_2 \\ &= A(t)(\alpha y_1 + \beta y_2) \end{aligned}$$

Para ver que o espaço das soluções tem dimensão  $n$  vamos verificar que as soluções  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  dos problemas de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad y(t_0) = \mathbf{e}_i$$

(onde  $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  denota o  $i$ -ésimo vector da base canónica de  $\mathbb{R}^n$ ) formam uma base do espaço das soluções:

1. O conjunto  $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$  é linearmente independente: Sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tais que

$$\alpha_1 y_1(t) + \dots + \alpha_n y_n(t) = 0.$$

Avaliando a última igualdade em  $t = t_0$  temos

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0.$$

Conclui-se que o conjunto  $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$  é linearmente independente.

2. O conjunto  $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$  gera o espaço das soluções: Seja  $y(t)$  uma solução qualquer de (33). Seja  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  a  $i$ -ésima coordenada do vector  $y(t_0)$ . Tanto  $y(t)$  como  $\alpha_1 y_1(t) + \dots + \alpha_n y_n(t)$  são soluções do problema de valor inicial para (33) com condição inicial em  $t_0$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n.$$

Mas a solução é única. Logo  $y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \dots + \alpha_n y_n(t)$  e portanto  $y(t)$  pertence ao espaço gerado pelo conjunto  $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$ .

□

**Nota 29.2.** A demonstração do Corolário 29.1 mostra que um conjunto de soluções do sistema (33) é linearmente independente sse o conjunto dos vectores de  $\mathbb{R}^n$  que se obtêm avaliando as soluções num dado instante é linearmente independente. Note-se ainda que na construção de uma base para o espaço das soluções podíamos ter tomado como condições iniciais qualquer base de  $\mathbb{R}^n$ .

O Corolário 29.1 reduz a resolução de um sistema linear homogêneo

$$(34) \quad \frac{dy}{dt} = A(t)y$$

à determinação de  $n$  soluções  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  que sejam linearmente independentes, pois estas formarão então uma base do espaço das soluções de (34)

**Definição 29.3.** Uma solução matricial fundamental para o sistema (34) é uma função matricial  $Y(t)$  que tem por colunas  $n$  soluções independentes de (34)

Em notação matricial, a solução geral de (34) escreve-se da seguinte forma em termos de uma solução matricial fundamental:

$$y(t) = Y(t) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{com } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

**Exemplo 29.4.** Achar a solução geral do sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t^2}x - \frac{1}{t}y \end{cases}$$

Sugestão: Comece por procurar soluções da forma  $x(t) = t^\alpha$ .

Substituindo  $x(t) = t^\alpha$  no sistema obtemos  $y(t) = \alpha t^{\alpha-1}$  e

$$\alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2} = \frac{1}{t^2}t^\alpha - \frac{1}{t}\alpha t^{\alpha-1} \Leftrightarrow \alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2} = t^{\alpha-2} - \alpha t^{\alpha-2} \Leftrightarrow (\alpha^2 - 1)t^{\alpha-2} = 0$$

que tem soluções  $\alpha = \pm 1$ . Estes valores de  $\alpha$  correspondem a  $x(t) = t$  e  $x(t) = \frac{1}{t}$  respectivamente e obtemos então as seguintes soluções do sistema:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t^2} \end{bmatrix}$$

Uma vez que estas soluções são linearmente independentes (claramente não se pode obter uma da outra multiplicando por um escalar), o Corolário 29.1 diz que formam uma base para o espaço das soluções. Assim, a solução geral pretendida (definida num intervalo do domínio do sistema, ou seja em  $] -\infty, 0[$  ou  $]0, +\infty[$ ) é

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t + \beta \frac{1}{t} \\ y(t) = \alpha - \beta \frac{1}{t^2} \end{cases} \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Uma solução matricial fundamental é dada por

$$Y(t) = \begin{bmatrix} t & \frac{1}{t} \\ 1 & -\frac{1}{t^2} \end{bmatrix}$$

e a solução geral pode escrever-se

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & \frac{1}{t} \\ 1 & -\frac{1}{t^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Infelizmente não há nenhum método geral para obter uma base das soluções de um sistema linear homogéneo quando a matriz dos coeficientes depende do tempo. A situação é melhor no caso em que a matriz dos coeficientes do sistema é constante.

**29.5. Revisão de valores e vectores próprios.** Recorde-se de Álgebra Linear que, se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , um número  $\lambda$  diz-se um *valor próprio* de  $A$  se existe um vector  $v \neq 0$  que satisfaz a equação  $Av = \lambda v$ . Nesse caso, as soluções não nulas da equação anterior chamam-se os *vectores próprios* de  $A$  associados ao valor próprio  $\lambda$ .

Os valores próprios são as raízes da equação característica

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

(onde  $I$  designa a matriz identidade) e os vectores próprios de  $\lambda$  acham-se resolvendo a equação  $(A - \lambda I)v = 0$ .

**Exemplo 29.6.** Achar os valores e vectores próprios da matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

Temos

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1$$

logo os valores próprios são as soluções da equação

$$(2 - \lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (2 - \lambda)^2 = 1 \Leftrightarrow (2 - \lambda) = \pm 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 \quad \text{ou } \lambda = 3$$

Os vectores próprios de 1 são as soluções de

$$(A - I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow a + b = 0$$

isto é, são os múltiplos do vector  $(1, -1)$ . Os vectores próprios de 3 são as soluções de

$$(A - 3I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow b = a$$

isto é, são os múltiplos do vector  $(1, 1)$ .

**29.7. Sistemas lineares homogéneos com coeficientes constantes.** Dado um valor próprio e um vector próprio de uma matriz  $A$ , há uma fórmula simples de obter uma solução do sistema homogéneo que tem  $A$  como matriz dos coeficientes:

**Proposição 29.8.** *Seja  $A$  uma matriz quadrada,  $\lambda$  um vector próprio de  $A$  e  $v$  um vector próprio associado. Então*

$$y(t) = e^{\lambda t}v$$

é uma solução do sistema  $\frac{dy}{dt} = Ay$ .

*Dem.* Temos apenas que substituir na equação:

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}v) = \lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}(\lambda v) = e^{\lambda t}Av = A(e^{\lambda t}v).$$

□

Se  $\mathbb{R}^n$  tiver uma base formada por valores próprios de  $A$  (recorde-se de Álgebra Linear que se diz então que  $A$  é uma matriz *diagonalizável*) a Proposição 29.8 dá-nos  $n$  soluções linearmente independentes de (34), e portanto uma fórmula para a solução geral do sistema.

**Exemplo 29.9.** *Resolver o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes deste sistema é a matriz  $A$  do Exemplo 29.6 logo a Proposição 29.8 dá-nos duas soluções independentes da forma  $e^{\lambda t}v$ :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A solução geral é portanto dada por

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^t + \beta e^{3t} \\ y(t) = -\alpha e^t + \beta e^{3t} \end{cases} \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Substituindo na condição inicial obtemos um sistema para achar  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 0 = -\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

A solução do problema de valor inicial é portanto

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} \\ y(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} \end{cases}$$

**29.10. Valores próprios complexos.** Como é sabido da Álgebra Linear, os valores próprios de uma matriz real podem ser números complexos. Nesse caso, a Proposição 29.8 dá-nos soluções com valores complexos. Podem obter-se soluções com valores reais a partir de uma solução complexa tomando as parte real e imaginária da solução complexa. De facto, se

$$y(t) = a(t) + ib(t)$$

é uma solução complexa de  $\frac{dy}{dt} = Ay$  (com  $A$  uma matriz real), então temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(a(t) + ib(t)) &= A(a(t) + ib(t)) \\ \frac{da}{dt} + i\frac{db}{dt} &= Aa(t) + iAb(t) \\ \begin{cases} \frac{da}{dt} = Aa \\ \frac{db}{dt} = Ab \end{cases} \end{aligned}$$

**Exemplo 29.11.** Achar a solução geral do sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Os valores próprios são as soluções de

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2 - \lambda)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (2 - \lambda) = \pm i \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm i.$$

Os vectores próprios de  $2 + i$  são as soluções de

$$\begin{bmatrix} 2 - (2 + i) & -1 \\ 1 & 2 - (2 + i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow -ia - b = 0$$

ou seja, são os vectores da forma  $(a, -ia) = a(1, -i)$  com  $a \neq 0$ . Obtemos assim a solução complexa do sistema

$$(35) \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{(2+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t + i \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t - i \cos t \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{bmatrix} + ie^{2t} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\cos t \end{bmatrix}$$

As partes real e imaginária desta solução são soluções reais do sistema e são claramente independentes (uma não é um múltiplo escalar da outra) logo conclui-se que a solução geral do sistema é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \alpha e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{bmatrix} + \beta e^{2t} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\cos t \end{bmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$



Note-se que não foi necessário considerar o valor próprio  $2 - i$  para obter a solução. Se repetíssemos as contas acima para este valor próprio obteríamos o vector próprio  $(1, i)$  e a solução complexa

$$e^{(2-i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} - ie^{2t} \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}$$

que é o resultado de aplicar o conjugado a (35). A parte real desta solução é igual à de (35) e a parte imaginária é simétrica pelo que esta solução complexa não nos traz nada de novo.

O que aconteceu no exemplo anterior é completamente geral. Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  real, o polinómio característico  $\det(A - \lambda I)$  é um polinómio real e portanto as suas raízes complexas aparecem em pares conjugados (com a mesma multiplicidade). Se  $\lambda = a + bi$ , é um valor próprio complexo com vector próprio  $v$  então, uma vez que  $\bar{A} = A$ , tem-se

$$\overline{Av} = \overline{\lambda v} \Leftrightarrow A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

logo  $\bar{v}$  é um vector próprio de  $\bar{\lambda} = a - bi$ . A solução complexa correspondente ao par  $(\bar{\lambda}, \bar{v})$  é

$$e^{\bar{\lambda}t}\bar{v} = \overline{e^{\lambda t}v}$$

e portanto tem a mesma parte real que  $e^{\lambda t}v$  e parte imaginária simétrica.

Conclusão: os valores próprios complexos de uma matriz real  $A$  (assim como os respectivos vectores próprios) aparecem em pares conjugados. Para obter uma base das soluções do sistema  $\frac{dy}{dt} = Ay$  basta considerar as soluções complexas correspondentes a um dos valores próprios de cada par conjugado e tomar as respectivas parte real e imaginária.

**29.12. Interpretação geométrica das soluções dos sistemas de equações diferenciais lineares homogéneos.** Consideremos um sistema da forma

$$(36) \quad \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

com  $A$  uma matriz real  $2 \times 2$ . O sistema (36) pode ser visto como descrevendo a evolução de uma partícula em função do tempo. A solução  $(x(t), y(t))$  descreve a posição da partícula no instante  $t$ . Podemos ter uma ideia do comportamento das soluções desenhando as trajectórias descritas pelas partículas para várias condições iniciais - algo a que se chama o retrato de fase do sistema.

**Exemplo 29.13.** Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

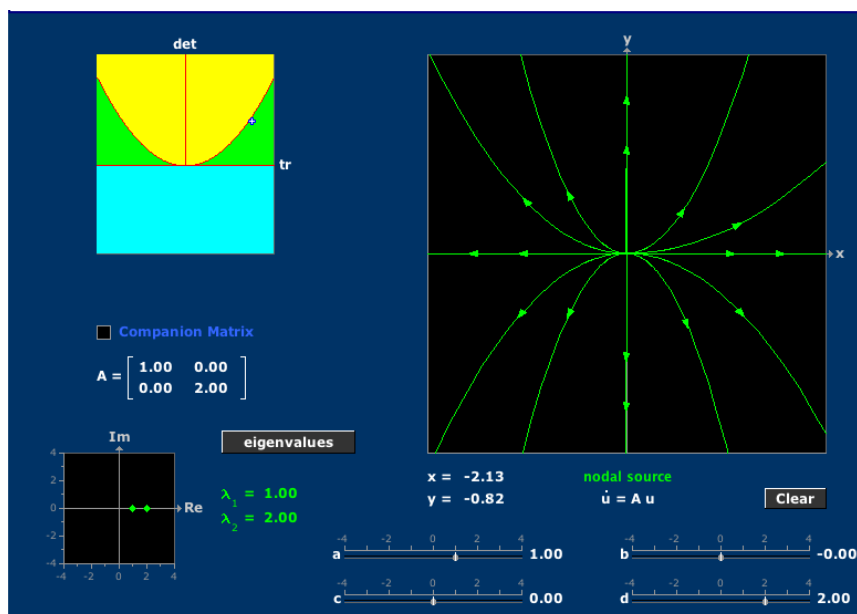
O sistema em questão consiste na realidade em duas equações diferenciais escalares independentes que podem ser facilmente resolvidas. A resposta é

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^t \\ y(t) = y_0 e^{2t} \end{cases}$$

Por exemplo para a condição inicial  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  obtemos a solução

$$(x(t), y(t)) = (e^t, e^{2t})$$

Uma vez que  $e^{2t} = (e^t)^2$ , as coordenadas da solução obedecem à relação  $y = x^2$ , e portanto a trajectória está contida na parábola de equação  $y = x^2$ . Quando  $t$  varia em  $\mathbb{R}$ , a coordenada  $x$  assume todos os valores em  $]0, +\infty[$  portanto a solução do problema de valor inicial descreve o arco de parábola  $\{(x, x^2): x > 0\}$ . A conta anterior pode ser repetida para outras condições iniciais. Vemos assim que todas as trajectórias não contidas nos eixos são arcos das parábolas  $y = \frac{y_0}{x_0^2} x^2$ . A origem e os semi-eixos são também trajectórias. A origem é a trajectória da solução constante correspondente à condição inicial  $(0, 0)$ . Uma condição inicial  $(x_0, 0)$  no eixo dos  $xx$  dá origem à solução  $(x_0 e^t, 0)$  que descreve o semi-eixo positivo ou negativo dos  $xx$  consoante  $x_0 > 0$  ou  $x_0 < 0$ , e analogamente para condições iniciais no eixo dos  $yy$ .



**Exemplo 29.14.** Consideremos agora o sistema do Exemplo 29.9:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

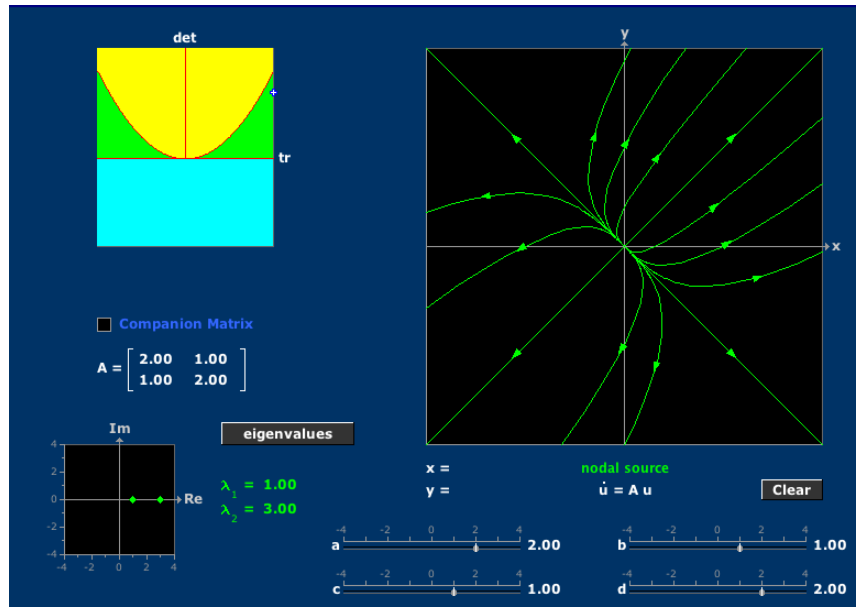
Vimos no Exemplo 29.9 que a matriz dos coeficientes do sistema  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  tem valores próprios 1 e 3 com vectores próprios  $(1, -1)$  e  $(1, 1)$  respectivamente. Isto significa que a mudança de variável definida por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

transforma o sistema para  $x(t)$  e  $y(t)$  no sistema de equações independentes (verifique!)

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u \\ \frac{dv}{dt} = 3v \end{cases}$$

análogo ao Exemplo 29.13, cujas soluções (não contidas nos eixos) descrevem agora arcos das curvas  $v = Cu^3$  com  $C \in \mathbb{R}$ . Note-se que  $u$  e  $v$  são as coordenadas no sistema de eixos definido pelos vectores próprios de 1 e 3 respectivamente. Obtemos assim o seguinte retrato de fase do sistema para  $x(t)$  e  $y(t)$ .



O exemplo anterior ilustra o seguinte comportamento geral: quando a matriz dos coeficientes de um sistema é diagonalizável, mudando de variável para o sistema de coordenadas definido por uma base formada por vectores próprios, obtém-se um sistema de equações escalares independente. Este último pode ser facilmente analisado como nos exemplos acima.

**Nota 29.15.** O problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = -2y \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

que se obtém trocando o sinal no sistema do Exemplo 29.13, tem como soluções

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t} \\ y(t) = y_0 e^{-2t} \end{cases}$$

que se obtêm das soluções do Exemplo 29.13 trocando  $t$  por  $-t$ . As trajectórias descritas pelas soluções são portanto exactamente as mesmas que as do Exemplo 29.13 mas são percorridas no sentido inverso e portanto o retrato de fase deste sistema obtém-se trocando o sentido das setas no Exemplo 29.13.

Os exemplos acima ilustram o que acontece quando a matriz dos coeficientes do sistema tem dois valores próprios com o mesmo sinal. Note-se o comportamento qualitativo muito distinto das soluções nestes casos. Em ambos a solução do problema com condição inicial  $(0, 0)$  é a solução constante - diz-se que  $(0, 0)$  é um *ponto de equilíbrio* do sistema. Quando os valores próprios são positivos, uma ligeira perturbação da condição inicial faz com que a solução se afaste exponencialmente da origem (diz-se que o equilíbrio é *instável*). No caso de valores próprios negativos as soluções aproximam-se exponencialmente de  $(0, 0)$  (diz-se que o equilíbrio é *estável*).

Os sistemas de equações diferenciais lineares usam-se frequentemente para aproximar o comportamento de sistemas perto de uma dada solução (que corresponde então à origem no sistema linear). Esta solução pode descrever a posição "normal" de um edifício ou a atitude de um avião em voo de cruzeiro por exemplo. A questão da estabilidade da solução é fundamental nas aplicações dada a impossibilidade na prática de controlar completamente as condições iniciais (os prédios e os aviões são abanados pelo vento por exemplo). Vimos acima como, pelo menos nalguns exemplos simples, esta questão se reduz à análise do sinal dos valores próprios de uma matriz. Para terminar vamos discutir rapidamente o caso em que os valores próprios têm sinais contrários.

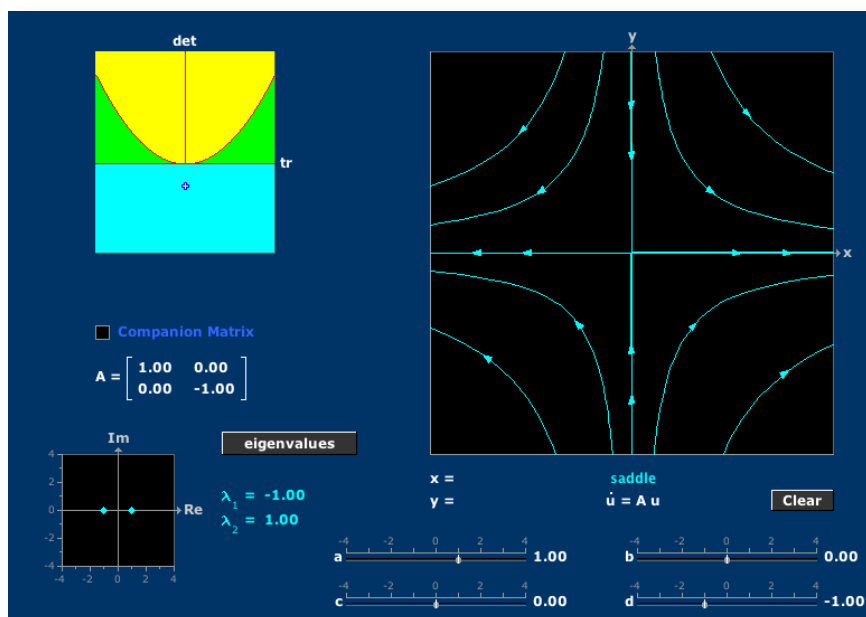
**Exemplo 29.16.** *O problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

*tem como soluções*

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^t \\ y(t) = y_0 e^{-t} \end{cases}$$

Uma vez que  $e^{-t} = \frac{1}{e^t}$  a solução do problema com condição inicial  $(1, 1)$  é o arco da hipérbole de equação  $y = \frac{1}{x}$  contida no primeiro quadrante. Para outras condições iniciais obtemos outros arcos de hipérbole conforme indicado na figura seguinte. Note-se que, genericamente, uma pequena variação da condição inicial nula leva a um afastamento exponencial da origem, que se diz portanto um equilíbrio instável.



Acima discutimos através de exemplos os retratos de fase de sistemas cuja matriz dos coeficientes tem valores próprios reais não nulos. Fica como exercício para os alunos interessado ver o que acontece no caso em que algum dos valores próprios se anula ou em que os valores próprios são complexos. As imagens acima foram obtidas usando o [applet](#) para desenhar retratos de fase elaborado para o curso básico de equações diferenciais do MIT. Recomenda-se aos alunos interessados que testem o applet com outros sistemas  $2 \times 2$ , incluindo o do Exemplo 29.11.

### 30. REDUÇÃO DE ORDEM

Até agora vimos como resolver sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes cuja matriz dos coeficientes é diagonalizável. É no entanto sabido de Álgebra Linear que nem todas as matrizes são diagonalizáveis. Um exemplo simples é o da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

O único valor próprio é 2 e claramente não pode haver dois vectores próprios linearmente independentes (pois então a matriz multiplicaria qualquer vector de  $\mathbb{R}^2$  por 2 e seria portanto diagonal). Mostra-se no entanto que dada uma matriz  $A$  de dimensão  $n \times n$  se pode formar uma base de  $\mathbb{C}^n$  usando *vectores próprios generalizados* de  $A$ . Nessa base a expressão para a transformação linear representada pela matriz  $A$  é "quase" diagonal (as únicas entradas não nulas fora da diagonal são alguns 1s imediatamente acima da diagonal). A cada vector próprio generalizado está associada uma solução do sistema de equações diferenciais e pode assim obter-se uma base do espaço das soluções. No entanto, o procedimento geral para achar uma base de vectores próprios generalizados é algo complicada e por isso não vamos discutir este método, referindo os alunos interessados para o Apêndice A.

Em vez disso vamos explicar um novo método de resolução de sistemas que se pode aplicar também quando a matriz dos coeficientes é diagonalizável.

**Exemplo 30.1.** *Consideremos o sistema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 2y \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes não é diagonalizável conforme já observámos. No entanto, é fácil resolver o sistema resolvendo a segunda equação para  $y$  e substituindo na primeira:

$$\frac{dy}{dt} = 2y \Leftrightarrow y(t) = \alpha e^{2t}, \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{R}$$

e substituindo na primeira equação do sistema obtém-se

$$\frac{dx}{dt} - 2x = \alpha e^{2t} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (e^{-2t}x(t)) = \alpha \Leftrightarrow e^{-2t}x(t) = \alpha t + \beta \Leftrightarrow x(t) = \alpha t e^{2t} + \beta e^{2t}.$$

A solução geral do sistema é portanto

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t e^{2t} + \beta e^{2t} \\ y(t) = \alpha e^{2t} \end{cases} \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

O exemplo anterior é particularmente simples mas ilustra o procedimento geral que consiste em obter, através de manipulações algébricas e substituições, um sistema equivalente onde uma das equações depende apenas de uma variável. Vejamos um exemplo mais representativo.

**Exemplo 30.2.**

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

A primeira equação é equivalente a

$$(37) \quad y(t) = 5x(t) - \frac{dx}{dt}$$

substituindo esta expressão para  $y$  na segunda equação obtemos a seguinte equação para  $x(t)$ :

$$\frac{d}{dt} \left( 5x - \frac{dx}{dt} \right) = x + 3 \left( 5x - \frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - 8 \frac{dx}{dt} + 16x = 0.$$

Ainda não aprendemos a resolver esta equação que envolve derivadas de ordem superior mas como iremos ver já a seguir a sua resolução é muito simples. Após resolver esta equação podemos substituir em (37) para obter a solução geral do sistema (ver o Exemplo 31.4 abaixo).

**30.3. Redução de ordem.** Uma equação diferencial de ordem  $n$  escalar é uma equação da forma

$$(38) \quad y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

onde  $y^{(k)}$  denota a derivada de ordem  $k$  de  $y$ , e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Uma solução é uma função  $n$  vezes diferenciável definida num intervalo que satisfaz a equação (38). As equações de ordem superior aparecem frequentemente nas aplicações. O exemplo mais famoso é talvez a equação de Newton para o movimento de uma partícula que se pode escrever na forma

$$my''(t) = F(t, y(t), y'(t)).$$

A função  $y(t)$  descreve a posição de uma partícula de massa  $m$  em que actua uma força  $F$  dependendo do tempo, posição e velocidade. Um exemplo particularmente importante é o do oscilador harmónico, em que a força tem a forma  $F(t, y, y') = -ky$  com  $k > 0$  uma constante.

O seguinte resultado básico explica como uma equação diferencial escalar de ordem  $n$  é equivalente a um sistema de  $n$  equações escalares de primeira ordem. Esta equivalência permite aplicar a teoria geral dos sistemas de equações de primeira ordem desenvolvida anteriormente (Teorema de Picard e companhia) às equações de ordem superior.

**Proposição 30.4.** *Há uma correspondência biunívoca entre as soluções da equação*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

e do sistema

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = y_3 \\ \vdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dt} = y_n \\ \frac{dy_n}{dt} = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

definida da seguinte forma:

- (a) Se  $y(t)$  é uma solução de (38),  $(y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$  é uma solução do sistema.  
 (b) Se  $(y_1(t), \dots, y_n(t))$  é uma solução do sistema,  $y_1(t)$  é uma solução de (38).

*Dem.* Começamos por notar que as soluções do sistema  $(y_1(t), \dots, y_n(t))$  verificam  $y_2(t) = y_1'(t)$ ,  $y_3(t) = y_2'(t) = y_1''(t)$ ,  $\dots$ ,  $y_n(t) = y_1^{(n-1)}(t)$ . De facto, o conteúdo das primeiras  $(n-1)$  equações do sistema é precisamente que uma solução tem necessariamente a forma  $(y_1(t), y_1'(t), \dots, y_1^{(n-1)}(t))$ . A última equação do sistema garante então que  $y_1(t)$  satisfaz (38). Reciprocamente se  $y(t)$  satisfaz (38), substituindo no sistema vemos que  $(y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$  é uma solução do sistema.  $\square$

**Exemplo 30.5.** *A equação de Newton para o oscilador harmónico  $y'' = -ky$  é equivalente ao sistema de duas equações*

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -ky_1 \end{cases}$$

**Nota 30.6.** A Proposição anterior torna claro o que deve ser uma condição inicial para uma equação de ordem superior (38): Uma solução é determinada (pelo menos quando  $f$  é de classe  $C^1$ ) pelos valores  $y(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)$  da função e das suas derivadas de ordem  $< n$  no instante inicial  $t_0$  (uma vez que a especificação destes valores corresponde a fixar uma condição inicial no sistema equivalente).

**Nota 30.7.** A Proposição 30.4 tem um análogo para sistemas de ordem superior (isto é para equações da forma (38) em que a incógnita  $y(t)$  toma valores em  $\mathbb{R}^k$ ). Um tal sistema é equivalente a um sistema de  $nk$  equações de primeira ordem, cujas variáveis correspondem às derivadas de ordem  $< n$  de cada uma das componentes de  $y(t)$ .

### 31. EQUAÇÕES LINEARES DE ORDEM SUPERIOR

Após estes preliminares sobre equações de ordem superior vamos agora discutir as soluções das equações que surgem quando eliminamos variáveis nos sistemas lineares homogêneos de coeficientes constantes. Estas equações têm a forma

$$(39) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad \text{com } a_i \in \mathbb{R}$$

e chamam-se *equações diferenciais lineares homogêneas de ordem  $n$  com coeficientes constantes*. De acordo com a Proposição 30.4 as soluções de (39) estão em correspondência biunívoca com as soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = -a_0y_1 - a_1y_2 - \dots - a_{n-1}y_n \end{cases}$$

que é um sistema linear com matriz de coeficientes

$$(40) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

que se chama a *matriz companheira* do polinómio  $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ . Uma vez que a correspondência da Proposição 30.4 respeita a estrutura de espaço vectorial no conjunto das soluções de (39) e no conjunto das soluções do sistema equivalente, o Corolário 29.1 tem a seguinte consequência.

**Corolário 31.1.** *O conjunto das soluções da equação (39) é um espaço vectorial de dimensão  $n$ .*

Vemos assim que basta achar  $n$  soluções linearmente independentes de (39) para obter a solução geral da equação. A determinação de uma base das soluções reduz-se pelo resultado seguinte ao problema de factorizar um polinómio.



**Proposição 31.2.** *Uma base para as soluções da equação*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad \text{com } a_i \in \mathbb{R}$$

*pode ser obtida da seguinte forma:*

*Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  as raízes do polinómio*

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

*e  $n_1, \dots, n_k$  as respectivas multiplicidades, de forma que,*

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

*Então, as funções*

$$\begin{aligned} &e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t} \\ &e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \dots, t^{n_2-1}e^{\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ &e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, \dots, t^{n_k-1}e^{\lambda_k t} \end{aligned}$$

*formam uma base para o espaço das soluções.*

**Nota 31.3.** *Se algumas das raízes  $\lambda_i$  na Proposição anterior são complexas, as soluções indicadas são uma base do espaço das soluções com valores complexos. Para obter uma base das soluções reais deve tomar-se a parte real e imaginária das soluções correspondentes a um dos valores próprios complexos em cada par conjugado.*

**Exemplo 31.4.**

(1) *Consideremos a equação de segunda ordem*

$$x'' - 8x' + 16x = 0$$

*que obtivemos ao resolver o sistema do Exemplo 30.2. Temos a factorização*

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2$$

*logo a Proposição 31.2 diz-nos que as funções  $e^{4t}$  e  $te^{4t}$  formam uma base para o espaço das soluções. A solução geral da equação é portanto*

$$x(t) = \alpha e^{4t} + \beta te^{4t} \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

*Substituindo na equação para  $y(t)$  obtemos a solução geral do sistema do Exemplo 30.2:*

$$y(t) = 5x - x' = 5(\alpha e^{4t} + \beta te^{4t}) - (4\alpha e^{4t} + \beta e^{4t} + 4\beta te^{4t}) = (\alpha - \beta)e^{4t} + \beta te^{4t}$$

*e portanto*

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{4t} + \beta te^{4t} \\ y(t) = (\alpha - \beta)e^{4t} + \beta te^{4t} \end{cases}$$

(2) *Resolver o problema de valor inicial*

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1$$

*O polinómio  $\lambda^2 + 1 = 0$  factoriza-se como  $(\lambda - i)(\lambda + i)$ . De acordo com a Proposição 31.2 uma base para as soluções complexas é dada pelas funções  $e^{it}$  e  $e^{-it}$ . Para obter*

uma base das soluções reais consideramos as soluções  $\operatorname{Re}(e^{it}) = \cos t$  e  $\operatorname{Im}(e^{it}) = \sin t$ . A solução geral da equação é portanto

$$y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t, \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Tem-se  $y'(t) = -\alpha \sin t + \beta \cos t$  e substituindo na condição inicial obtém-se

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = 1 \\ -\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

A resposta é portanto

$$y(t) = \cos t + \sin t.$$

Para lidar com as equações lineares de coeficientes constantes da forma (39) é conveniente introduzir o operador de derivação  $D$  que transforma uma função na sua derivada e encarar a multiplicação por um escalar  $a \in \mathbb{R}$  também como um operador, que leva uma função  $f$  na função  $af$ . A composição de operadores é denotada multiplicativamente de forma que, por exemplo,  $D^2$  denota o operador que leva uma função na sua segunda derivada.

**Exemplo 31.5.** A equação  $y'' - y = 0$  pode escrever-se  $(D^2 - 1)y = 0$ . As soluções são portanto as funções que estão no núcleo do operador  $D^2 - 1$ . Note-se que  $D^2 - 1 = (D - 1)(D + 1)$  onde o operador do lado direito do sinal de igual denota a composição do operador  $(D - 1)$  com o operador  $(D + 1)$ . De facto

$$(D - 1)(D + 1)y = (D - 1)(y' + y) = (y'' + y') - (y' + y) = y'' - y.$$

*Demonstração da Proposição 31.2.* Tendo em conta o Corolário 31.1, temos a verificar que as funções listadas no enunciado da Proposição

- (1) são soluções de (39).
- (2) são linearmente independentes.

Para verificar (1) note-se que a equação (39) pode ser escrita na forma

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y = 0.$$

Uma vez que o operador de derivação comuta com a multiplicação por escalar, a factorização do polinómio

$$(41) \quad \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

corresponde a uma factorização do operador

$$(42) \quad D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0 = (D - \lambda_1)^{n_1} \dots (D - \lambda_k)^{n_k}$$

(conforme o Exemplo 31.5). De facto, as manipulações algébricas necessárias para transformar o termo direito de (41) no termo esquerdo da equação podem ser executadas para fazer o mesmo na equação (42) devido a  $D$  comutar com multiplicação por escalares. Tendo em conta que a ordem dos factores no termo direito da equação (42) é arbitrário, resta-nos ver que as funções

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}$$

estão no núcleo do operador  $(D - \lambda)^k$ . Esta afirmação é uma consequência do seguinte cálculo:

$$(D - \lambda)(t^j e^{\lambda t}) = (jt^{j-1}e^{\lambda t} + \lambda t^j e^{\lambda t}) - \lambda t^j e^{\lambda t} = jt^{j-1}e^{\lambda t}$$

que diz que a aplicação do operador  $(D - \lambda)$  tem como efeito reduzir em 1 o expoente de  $t$  (e anula a solução se o expoente é 0).

A verificação de (2), isto é, de que as soluções listadas no enunciado da Proposição são linearmente independentes é um bom exercício de Álgebra Linear.  $\square$

### Exemplo 31.6.

(1) Achar a solução geral de

$$(D^2 + 2D + 3)^2(D + 1)^3y = 0.$$

Tem-se

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 3) = ((\lambda + 1)^2 + 2) = (\lambda - (-1 + i\sqrt{2}))(\lambda - (-1 - i\sqrt{2}))$$

logo a equação é equivalente a

$$(D - (-1 + i\sqrt{2}))^2(D - (-1 - i\sqrt{2}))^2(D + 1)^3y = 0$$

De acordo com a Proposição 31.2, uma base das soluções complexas é dada por

$$e^{(-1+i\sqrt{2})t}, te^{(-1+i\sqrt{2})t}, e^{(-1-i\sqrt{2})t}, te^{(-1-i\sqrt{2})t}, e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}$$

e portanto, de acordo com a Nota 31.3 a solução geral da equação é dada por

$$y(t) = e^{-t} \left( c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 t \cos(\sqrt{2}t) + c_3 \sin(\sqrt{2}t) + c_4 t \sin(\sqrt{2}t) + c_5 + c_6 t + c_7 t^2 \right)$$

onde  $c_1, \dots, c_7 \in \mathbb{R}$

(2) Resolver o problema de valor inicial

$$y''' + y'' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$$

A equação escreve-se

$$(D^3 + D^2)y = 0 \Leftrightarrow (D - 0)^2(D + 1)y = 0$$

logo de acordo com a Proposição 31.2 a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{0t} + c_2 t e^{0t} + c_3 e^{-t} = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t} \quad \text{com } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Temos

$$y'(t) = c_2 - c_3 e^{-t} \quad e \quad y''(t) = c_3 e^{-t}$$

logo substituindo nas condições iniciais obtem-se

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 1 \\ c_2 - c_3 = 0 \\ c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

A solução é portanto

$$y(t) = t + e^{-t}$$

**Exemplo 31.7.** *Achar a solução geral do sistema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = y + z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases}$$

Da primeira equação temos  $y = x' - x$ . Substituindo nas restantes duas equações obtemos o sistema para  $x$  e  $z$  dado por

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x' - x) = (x' - x) + z \\ z' = x - (x' - x) + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' - x' = x' - x + z \\ z' = 2x - x' + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x'' - 2x' + x \\ z' = 2x - x' + 2z \end{cases}$$

Substituindo a expressão para  $z$  na última equação obtemos a seguinte equação para  $z$ :

$$(x'' - 2x' + x)' = 2x - x' + 2(x'' - 2x' + x) \Leftrightarrow x''' - 4x'' + 6x' - 4x = 0$$

É fácil ver que o polinómio

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0$$

tem  $\lambda = 2$  como raiz e usando a regra de Ruffini obtém-se então a factorização

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = (\lambda - 2)((\lambda + 1)^2 + 1) = (\lambda - 2)(\lambda - (1 + i))(\lambda - (1 - i))$$

De acordo com a Proposição 31.2 e a Nota 31.3 a solução geral é portanto

$$x(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^t \cos t + \gamma e^t \sin t$$

Substituindo em  $y = x' - x$  tem-se então

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\alpha e^{2t} + \beta e^t(\cos t - \sin t) + \gamma e^t(\sin t + \cos t) - (\alpha e^{2t} + \beta e^t \cos t + \gamma e^t \sin t) \\ &= \alpha e^{2t} - \beta e^t \sin t + \gamma e^t \cos t \end{aligned}$$

e substituindo em  $z = y' - y$  tem-se

$$\begin{aligned} z(t) &= 2\alpha e^{2t} - \beta e^t(\sin t + \cos t) + \gamma e^t(\cos t - \sin t) - (\alpha e^{2t} - \beta e^t \sin t + \gamma e^t \cos t) \\ &= \alpha e^{2t} - \beta e^t \cos t - \gamma e^t \sin t \end{aligned}$$

A solução geral do sistema é portanto

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^t \cos t + \gamma e^t \sin t \\ y(t) = \alpha e^{2t} - \beta e^t \sin t + \gamma e^t \cos t \\ z(t) = \alpha e^{2t} - \beta e^t \cos t - \gamma e^t \sin t \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes deste sistema é diagonalizável pelo que a solução geral pode também ser encontrada recorrendo à Proposição 29.8. Vamos fazê-lo a título de comparação dos dois métodos. A matriz dos coeficientes do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios são as soluções de

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 1 + (1-\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$$

Este polinómio é (a menos de sinal) o que foi encontrado no método anterior. As suas raízes são portanto  $\lambda = 2$  e  $1 \pm i$ . Um vector próprio de 2 é uma solução (não nula) de

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ -b + c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ c = b \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Logo os vectores próprios de 2 são os múltiplos não nulos de  $(1, 1, 1)$ . Um vector próprio de  $1 + i$  é uma solução não nula de

$$\begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 1 & -1 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -ia + b = 0 \\ -ib + c = 0 \\ a - b + (1-i)c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = ia \\ c = ib = -a \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Logo os vectores próprios de  $1 + i$  são os múltiplos não nulos de  $(1, i, -1)$ . Uma vez que

$$e^{(1+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \\ -\cos t - i \sin t \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} + ie^t \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

conclui-se que a solução geral do sistema é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \alpha e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta e^t \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} + \gamma e^t \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} \quad \text{com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

## 32. MÉTODO DOS ANIQUILADORES

**32.1. Equações lineares.** Recorde-se de Álgebra Linear que uma equação linear para  $y$  é uma equação da forma

$$(43) \quad Ly = b$$

onde  $L$  é uma transformação linear e  $b$  está no contradomínio de  $L$ . Quando  $b = 0$  a equação diz-se *homogénea*. Os exemplos em que estamos interessados são quando  $L$  é da forma

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y, \quad \text{ou } Ly = \frac{dy}{dt} - Ay$$

mas aquilo que vamos agora recordar é um facto perfeitamente geral.

Se  $y_1$  e  $y_2$  são soluções de (43) então

$$L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = b - b = 0$$

logo duas soluções de (43) diferem numa solução da equação homogénea. Por outro lado dada uma solução particular  $y_p$  de (43) e sendo  $y_h$  uma solução da equação homogénea  $Ly = 0$  temos

$$L(y_p + y_h) = Ly_p + Ly_h = b + 0 = b$$

Conclui-se que a solução geral de uma equação linear (43) é da forma

$$(44) \quad y = y_p + y_h$$

onde  $y_p$  é uma solução particular (isto é uma solução qualquer fixada) da equação (43) e  $y_h$  é a solução geral da equação homogénea associada.

**Exemplo 32.2.** Seja  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a transformação linear definida por  $L(x, y) = 2x + y$  e  $b = 3$ . Uma solução particular de  $L(x, y) = b$  é  $(x, y) = (1, 1)$ . A equação homogénea associada é a equação  $2x + y = 0$  que tem solução geral  $(x, y) = (t, -2t)$ , com  $t \in \mathbb{R}$  (a recta com declive  $-2$  que passa pela origem). A equação (44) diz que a solução geral de  $2x + y = 3$  é

$$(1, 1) + t(1, -2): t \in \mathbb{R}$$

isto é, a recta paralela à recta definida pela equação homogénea, que passa pela solução particular  $(1, 1)$ .

O exemplo anterior ilustra o significado geométrico da equação (44). As soluções da equação homogénea formam um subespaço vectorial do domínio de  $L$  e as soluções de uma equação homogénea são um espaço afim paralelo que passa por qualquer solução particular dada.

De acordo com a fórmula (44), conhecendo a solução geral da equação  $Ly = 0$  a solução geral de uma equação  $Ly = b$  reduz-se à determinação de uma solução particular. Começamos por ver um método para achar uma solução particular de uma equação linear de ordem superior e coeficientes constantes não homogénea que funciona para uma classe importante de funções  $b$ .

**32.3. Método dos aniquiladores.** Consideremos a equação

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = b(t)$$

e suponhamos que  $b(t)$  é uma combinação linear de funções da forma

$$t^k e^{at} \cos(bt), \quad t^k e^{at} \sin(bt), \quad \text{com } k \geq 0, a, b \in \mathbb{R}.$$

A função  $b(t)$  é ela própria a solução de uma equação linear de ordem superior homogénea que sabemos achar pela Proposição 31.2.

Usando a notação introduzida na secção 31 em que  $D$  denota o operador de derivação estamos à procura de uma solução de

$$(45) \quad p(D)y = b(t)$$

onde  $p$  é o polinómio definido por  $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$ , e sabemos achar um outro polinómio  $q$  tal que

$$q(D)b = 0$$

Este  $q$  chama-se um *polinómio aniquilador* para  $b$ . Aplicando o aniquilador  $q(D)$  a ambos os termos da equação obtem-se

$$q(D)p(D)y = q(D)b(t) = 0$$

e portanto  $y$  é uma solução da equação homogénea

$$q(D)p(D)y = 0$$

Podemos agora achar a solução geral desta equação usando a Proposição 31.2 e substituir na equação inicial (45) para obter uma solução particular.

**Exemplo 32.4.** *Achar a solução geral de*

$$(46) \quad y'' - 3y' + 2y = e^t$$

*A equação pode escrever-se*

$$(D - 2)(D - 1)y = e^t$$

*Uma vez que  $e^t$  é uma solução da equação  $(D - 1)y = 0$ , o operador  $(D - 1)$  aniquila  $e^t$ . Conclui-se que uma solução da equação (46) terá de satisfazer a equação*

$$(D - 2)(D - 1)^2y = 0$$

*A solução geral desta equação é (pela Proposição 31.2)*

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^t + c_3te^t \text{ com } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

*logo as soluções de (46) têm que ter esta forma. Para obter uma solução particular substituímos esta expressão para  $y$  em (46) para determinar os coeficientes das soluções (por esta razão o método dos aniquiladores é também conhecido por método dos coeficientes indeterminados).*

*Para simplificar as contas convém notar que os dois primeiros termos  $c_1e^{2t} + c_2e^t$  são soluções da equação homogénea  $(D - 2)(D - 1)y = 0$  e portanto vão anular-se quando substituímos na equação. Basta portanto substituir  $c_3te^t$ :*

$$(D - 2)(D - 1)(c_3te^t) = e^t \Leftrightarrow (D - 2)(c_3e^t) = e^t \Leftrightarrow c_3(e^t - 2e^t) = e^t \Leftrightarrow c_3 = -1$$

*Conclui-se portanto que  $-te^t$  é uma solução particular e que*

$$y(t) = -te^t + c_1e^{2t} + c_2e^t, \text{ com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

*é a solução geral pretendida.*

**Exemplo 32.5.** *Achar a solução geral de*

$$(D^2 + 1)y = t + e^t$$

*A função  $t$  é aniquilada por  $D^2$  e  $e^t$  é aniquilada por  $D - 1$ , logo  $D^2(D - 1)$  aniquila o termo independente  $b(t) = t + e^t$ . Conclui-se que*

$$D^2(D - 1)(D^2 + 1)y = 0$$

*Esta equação tem solução geral*

$$y(t) = c_1 + c_2t + c_3e^t + c_4 \cos t + c_5 \sin t$$

Os últimos dois termos são soluções da equação  $(D^2 + 1)y = 0$  pelo que basta substituir  $c_1 + c_2t + c_3e^t$  na equação inicial:

$$(D^2 + 1)(c_1 + c_2t + c_3e^t) = t + e^t \Leftrightarrow c_3e^t + (c_1 + c_2t + c_3e^t) = t + e^t \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

A solução é portanto

$$y(t) = t + \frac{1}{2}e^t + \alpha \cos t + \beta \sin t \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

### 33. EXPONENCIAL MATRICIAL

Seja  $A$  uma matriz quadrada. Define-se a *exponencial da matriz*  $A$  por

$$(47) \quad e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

Na fórmula anterior,  $A^0$  é a matriz identidade  $I$  por convenção e (obviamente) a soma da série de matrizes significa a matriz que tem por entradas a soma das séries numéricas formadas pelas entradas correspondentes dos termos da soma.

Note-se que se  $A$  é uma matriz  $1 \times 1$  (isto é, um número) a fórmula (47) é a fórmula de MacLaurin para a função exponencial habitual.

É necessário verificar que a série (47) converge. Para isso definimos a norma de uma matriz  $n \times n$  por

$$\|A\| = \max\{|a_{ij}| : 1 \leq i, j \leq n\}$$

Uma vez que a entrada  $ij$  da matriz  $C = AB$  se obtém multiplicando a linha  $i$  da matriz  $A$  pela coluna  $j$  da matriz  $B$ , ela é dada pela expressão

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj}$$

logo

$$|c_{ij}| \leq \sum_{l=1}^n |a_{il}| |b_{lj}| \leq \sum_{l=1}^n \|A\| \|B\| = n \|A\| \|B\|$$

e portanto

$$\|C\| = \|AB\| \leq n \|A\| \|B\|$$

Da igualdade anterior conclui-se que

$$\|A^2\| \leq n \|A\|^2, \quad \|A^3\| \leq n \|A\| \|A^2\| \leq n \|A\| n \|A\|^2 = n^2 \|A\|^3, \dots$$

isto é que

$$\|A^k\| \leq n^{k-1} \|A\|^k$$

Conclui-se que cada entrada da série (47) é majorada em módulo pela série numérica

$$(48) \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{k!} \|A\|^k$$



que é convergente (até sabemos a sua soma usando a série de MacLaurin da função exponencial:  $\epsilon 1 + \frac{e^{n\|A\|}-1}{n}$ ). As séries numéricas que definem as entradas da matriz  $e^A$  são portanto absolutamente convergentes.

**Proposição 33.1** (Propriedades da exponencial matricial).

(i)  $e^0 = I$

(ii) A exponencial de uma matriz diagonal por blocos pode ser calculada "bloco a bloco", isto é,

$$e \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^A & 0 \\ 0 & e^B \end{bmatrix}$$

Em particular a exponencial de uma matriz diagonal calcula-se tomando a exponencial de cada entrada na diagonal

$$e \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

(iii)  $e^{SJS^{-1}} = Se^J S^{-1}$

(iv)  $e^{A+B} = e^A e^B$  se as matrizes  $A$  e  $B$  comutam, isto é se  $AB = BA$ .

(v) A matriz  $e^A$  é invertível com inversa  $e^{-A}$ .

(vi) Se  $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$  então  $e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$

(vii) A função matricial  $e^{At}$  é a solução matricial fundamental do sistema  $\frac{dy}{dt} = Ay$  que no instante  $t = 0$  toma como valor a matriz identidade.

Dem.

(i)  $e^0 = I + 0 + 0 + \dots = I$ .

(ii) Uma vez que

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} A^k & 0 \\ 0 & B^k \end{bmatrix}$$

tem-se

$$e \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = I + \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & B^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} A^3 & 0 \\ 0 & B^3 \end{bmatrix} + \cdots = \begin{bmatrix} e^A & 0 \\ 0 & e^B \end{bmatrix}$$

(iii) Temos

$$(SJS^{-1})^k = SJS^{-1}SJS^{-1} \cdots SJS^{-1} = SJJ \cdots JS^{-1} = SJ^k S^{-1}$$

logo

$$\begin{aligned}
 e^{SJS^{-1}} &= I + SJS^{-1} + \frac{1}{2!}S^2J^2S^{-1} + \frac{1}{3!}S^3J^3S^{-1} + \dots \\
 &= S \left( I + J + \frac{1}{2!}J^2 + \frac{1}{3!}J^3 + \dots \right) S^{-1} \\
 &= Se^J S^{-1}.
 \end{aligned}$$

(iv) Se  $AB = BA$  é válida a fórmula do binómio de Newton

$$(A + B)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^j B^{k-j}$$

portanto

$$\begin{aligned}
 e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^j B^{k-j} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} A^j B^{k-j} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{a+b=k \\ a,b \geq 0}} \frac{1}{a!} \frac{1}{b!} A^a B^b \\
 &= \left( \sum_{a=0}^{\infty} \frac{1}{a!} A^a \right) \left( \sum_{b=0}^{\infty} \frac{1}{b!} B^b \right) \\
 &= e^A e^B
 \end{aligned}$$

(v) Uma vez que as matrizes  $A$  e  $-A$  comutam, a propriedade (iv) diz-nos que

$$I = e^0 = e^{A-A} = e^A e^{-A}$$

portanto  $e^A$  é invertível com inversa  $e^{-A}$ .

(vi) Podemos escrever  $J = \lambda I + (J - \lambda I)$ . A matriz  $N = J - \lambda I$  tem a propriedade que  $N^k = 0$  para  $k$  suficientemente grande (basta na realidade  $k \geq n$  como iremos ver). A série (47) que define  $e^{Nt}$  é então uma soma finita que vamos agora calcular explicitamente. As únicas entradas não nulas de  $N$  são as imediatamente acima da diagonal principal e estas são todas iguais a 1. É imediato verificar que a sucessão de matrizes  $N, N^2, N^3, \dots$  se obtém "subindo a diagonal de 1s" até que esta desaparece.

Por exemplo, tomando  $n = 4$  temos

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e  $N^k = 0$  para  $k \geq 4$ . Portanto

$$\begin{aligned} e^{Nt} &= I + Nt + \frac{1}{2!}N^2t^2 + \frac{1}{3!}N^3t^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}N^{n-1}t^{n-1} + 0 + 0 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Uma vez que a matriz diagonal  $\lambda It$  comuta com todas as matrizes podemos aplicar a propriedade (iv) e concluir que

$$e^{Jt} = e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda It}e^{Nt} = e^{\lambda t}Ie^{Nt} = e^{\lambda t}e^{Nt}$$

conforme pretendido.

(vii) A majoração (48) para as entradas da matriz  $e^A$  permite derivar a série que define  $e^{At}$  termo a termo. Temos portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{At}) &= \frac{d}{dt} \left( I + At + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots \right) \\ &= A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \dots \\ &= A \left( I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots \right) \\ &= Ae^{At} \end{aligned}$$

Isto mostra que  $e^{At}$  é uma solução matricial do sistema  $\frac{dy}{dt} = Ay$  (ou seja, as colunas de  $e^{At}$  são soluções do sistema). Trata-se de uma solução matricial fundamental uma vez que  $e^{At}$  é uma matriz invertível para todo o  $t$  (pela propriedade (v)). Finalmente, pela propriedade (i), em  $t = 0$  temos  $e^{A0} = e^0 = I$ .

□

**Nota 33.2.** O procedimento usado para calcular  $e^{Jt}$  na demonstração da Proposição 33.1(vi) pode ser usado para calcular de forma eficiente  $e^{At}$  quando  $A$  é uma matriz triangular superior (ou inferior) com todas as entradas diagonais iguais. Nesse caso  $A = \lambda I + N$  (onde  $\lambda$  é o valor de qualquer das entradas diagonais) e a matriz  $N$  tem a propriedade que  $N^n = 0$  (onde  $n$  é a dimensão da matriz) pelo que a série (47) pode ser usada para calcular  $e^{Nt}$  de forma eficiente (pelo menos quando  $n$  é pequeno).

A Proposição 33.1(vii) dá o seguinte método geral para calcular  $e^{At}$ :

$$(49) \quad e^{At} = Y(t)Y(0)^{-1}$$

onde  $Y(t)$  é uma solução matricial fundamental do sistema  $\frac{dy}{dt} = Ay$  (que já aprendemos a calcular). De facto, as colunas de  $Y(t)Y(0)^{-1}$  são combinações lineares das colunas de  $Y(t)$  e portanto soluções do sistema. Obviamente, o valor da  $i$ -ésima coluna de  $Y(t)Y(0)^{-1}$  quando  $t = 0$  é o  $i$ -ésimo vector da base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Mas a Proposição 33.1(vii) diz que as colunas de  $e^{At}$  são precisamente caracterizadas por estas duas propriedades, logo a igualdade (49) verifica-se.

**Exemplo 33.3.** *Consideremos a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

do sistema do Exemplo 31.7. De acordo com os cálculos efectuados nesse exemplo, uma solução matricial fundamental é dada por

$$Y(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^t \cos t & e^t \sin t \\ e^{2t} & -e^t \sin t & e^t \cos t \\ e^{2t} & -e^t \cos t & -e^t \sin t \end{bmatrix}$$

Portanto

$$Y(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando a regra de Laplace temos

$$Y(0)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^t = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$e^{At} = Y(t)Y(0)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t(\cos t - \sin t) & e^t \sin t & \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t) \\ \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^t(\cos t - \sin t) & e^t \cos t & \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) \\ \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) & -e^t \sin t & \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t) \end{bmatrix}$$

**Exemplo 33.4.** *Calcular  $e^{At}$  para*

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos aplicar as propriedades (ii) e (vi) da Proposição 33.1 para concluir que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Poderíamos usar o método geral dado pela equação (49). Para ilustrar um método alternativo que usa a Proposição 33.1(iii), começamos por achar os valores e vectores próprios de  $A$ . Obviamente os valores próprios são 2 e 3 e  $(1, 0)$  é um vector próprio de 2. Um vector próprio para 3 é uma solução de

$$(A - 3Iv) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow b = a$$

Logo  $(1, 1)$  é um vector próprio de 3. A matriz

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que tem por colunas os vectores próprios é a matriz que transforma as coordenadas de um vector na base dos vectores próprios nas coordenadas do mesmo vector na base canónica e portanto

$$A = S \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} S^{-1}$$

e portanto de acordo com a propriedade (iii) temos

$$e^{At} = S \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} S^{-1}$$

Uma vez que

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

conclui-se que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

**Nota 33.5.** No exemplo anterior, a matriz  $Y(t) = S \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$  é precisamente a solução matricial fundamental dada pela Proposição 29.8 (as colunas são da forma  $e^{\lambda t}v$  com  $v$  um vector próprio de  $\lambda$ ). Para esta matriz  $Y(t)$  temos obviamente  $Y(0) = S$  e portanto o método usado para calcular  $e^{At}$  neste exemplo não é mais do que a fórmula (49) para esta solução matricial fundamental particular.

**Nota 33.6.** *Uma propriedade básica da função  $e^{At}$  é que no instante  $t = 0$  assume como valor a matriz identidade. É muito fácil verificar se uma função matricial tem ou não esta propriedade. Recomenda-se que sempre que se calcule  $e^{At}$  se substitua  $t = 0$  e se verifique que é de facto a matriz identidade. É uma maneira rápida de detectar muitos erros de cálculo.*

### 34. FÓRMULA DE VARIAÇÃO DAS CONSTANTES

O método dos aniquiladores pode aplicar-se apenas quando  $b(t)$  é a solução de uma equação diferencial linear homogénea com coeficientes constantes. Vamos agora ver como achar uma solução particular sem qualquer restrição sobre  $b(t)$  tanto no caso de uma equação escalar como de um sistema.

Considere-se primeiro a equação linear escalar

$$\frac{dy}{dt} = ay + b(t)$$

com  $a \in \mathbb{R}$ . Aprendemos na secção 22.1 a resolver estas equações. O truque é multiplicar pelo factor integrante  $e^{-at}$ . Obtém-se a equação equivalente

$$\frac{d}{dt} (e^{-at}y(t)) = b(t)e^{-at}$$

que pode então resolver-se facilmente.

O cálculo anterior pode ser repetido no caso de um sistema linear usando a exponencial de matrizes e, em particular, a Proposição 33.1 (vii). Seja  $A$  uma matriz quadrada,  $b(t)$  uma função contínua com valores em  $\mathbb{R}^n$  e consideremos o sistema

$$\frac{dy}{dt} = Ay + b(t)$$

Multiplicando pela função matricial  $e^{-At}$  obtemos a equação

$$(50) \quad e^{-At} \frac{dy}{dt} - e^{-At} Ay = e^{-At} b(t)$$

que é equivalente uma vez que  $e^{-At}$  é uma matriz invertível para todo o  $t$ . Tendo em conta que  $-e^{-At}A = -Ae^{-At} = \frac{d}{dt}e^{-At}$  (a primeira igualdade é uma consequência imediata da definição (47) e a segunda é a Proposição 33.1(vii)), podemos re-escrever (50) na forma

$$\frac{d}{dt} (e^{-At}y(t)) = e^{-At}b(t)$$

Integrando de  $t_0$  a  $t$  obtemos, pela regra de Barrow

$$\begin{aligned} e^{-At}y(t) - e^{-At_0}y(t_0) &= \int_{t_0}^t e^{-As}b(s)ds \\ e^{-At}y(t) &= e^{-At_0}y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-As}b(s)ds \\ y(t) &= e^{At} \left( e^{-At_0}y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-As}b(s)ds \right) \\ y(t) &= e^{A(t-t_0)}y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s)ds \end{aligned}$$

onde na última igualdade foi usada a Proposição 33.1(iv). Obtemos assim o seguinte resultado.

**Proposição 34.1** (Fórmula de variação das constantes). *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ ,  $b: ]c, d[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua e  $t_0 \in ]c, d[$ . A solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

é dada pela fórmula

$$(51) \quad y(t) = e^{A(t-t_0)}y_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s)ds$$

**Nota 34.2.** A fórmula (51) é válida quando  $b(t) = 0$  e dá a expressão  $y(t) = e^{A(t-t_0)}y(t_0)$  para a solução do problema de valor inicial para o sistema homogêneo. Em geral, o primeiro termo do lado direito da igualdade (51) é a solução do sistema homogêneo que toma o valor  $y_0$  em  $t = t_0$ , enquanto que o segundo termo é a solução particular do sistema que toma o valor 0 no instante inicial.

**Nota 34.3.** O termo  $\int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s)ds$  na fórmula (51) pode ser interpretado como uma "soma contínua" das soluções do problema de valor inicial homogêneo com condição inicial  $y(s) = b(s)$ . A fórmula diz que o problema de valor inicial não homogêneo se resolve "adicionando em cada instante" a solução de um problema homogêneo com condição inicial dada pelo termo independente. Esta "variação da condição inicial" justifica o nome da fórmula (51).

**Exemplo 34.4.** Resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 3 \\ \frac{dy}{dt} = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Na forma matricial o sistema escreve-se

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pela Proposição 33.1(vi) temos

$$e \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

logo substituindo em (51) obtemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{2(t-s)} & (t-s)e^{2(t-s)} \\ 0 & e^{2(t-s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} + 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 3e^{2(t-s)} \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} + 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t 3e^{2(t-s)} ds \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\int_0^t 3e^{2(t-s)} ds = -\frac{3}{2}e^{2(t-s)} \Big|_{s=0}^{s=t} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{2t}$$

obtemos a solução

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}e^{2t} + 2te^{2t} \\ y(t) = 2e^{2t} \end{cases}$$

Note-se que o sistema pode também ser resolvido resolvendo primeiro a equação para  $y(t)$  e substituindo na primeira equação para achar  $x(t)$ . Essa seria provavelmente a maneira mais simples de resolver o sistema.

Uma vez que neste exemplo a função  $b(t)$  é constante, podemos ainda resolver este problema de valor inicial começando por obter uma solução particular constante para a equação não homogênea. Substituindo na equação obtem-se

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A solução geral do sistema não homogêneo é portanto

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

e podemos agora substituir na condição inicial para achar  $c_1, c_2$ .

Uma versão da fórmula (51) é válida mesmo quando os coeficientes do sistema em questão variam com o tempo.

**Proposição 34.5** (Fórmula de variação das constantes (bis)). *Considere-se o sistema*

$$(52) \quad \frac{dy}{dt} = A(t)y + b(t)$$



com  $A(t)$  e  $b(t)$  contínuas, e seja  $Y(t)$  uma solução matricial fundamental para o sistema homogéneo associado. Então a solução geral do sistema é

$$(53) \quad y(t) = Y(t) \left( c + \int Y(t)^{-1} b(t) dt \right), \quad c \in \mathbb{R}^n$$

*Dem.* Uma vez que o termo  $Y(t)c$  é a solução geral do sistema homogéneo, basta verificar que

$$y_p(t) = Y(t) \int Y(t)^{-1} b(t) dt$$

é uma solução particular do sistema. Como  $Y'(t) = A(t)Y(t)$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dy_p}{dt} &= Y'(t) \left( \int Y(t)^{-1} b(t) dt \right) + Y(t) \frac{d}{dt} \left( \int Y(t)^{-1} b(t) dt \right) \\ &= A(t)Y(t) \left( \int Y(t)^{-1} b(t) dt \right) + Y(t)Y(t)^{-1} b(t) \\ &= A(t)y_p(t) + b(t) \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.  $\square$

**Nota 34.6.** Obviamente a fórmula (53) é válida no caso em que a matriz dos coeficientes  $A(t)$  é constante e dá uma alternativa à fórmula (51). A fórmula (53) tem a vantagem de que é mais fácil calcular  $Y(t)$  do que  $e^{At}$ , mas tem a desvantagem de ser necessário calcular  $Y(t)^{-1}$ . Dependendo de  $b(t)$  pode não ser necessário calcular toda a matriz inversa  $Y(t)^{-1}$  o que pode tornar a fórmula (53) mais eficiente do que (51) em termos de cálculos. Uma vez que é muito fácil inverter matrizes  $2 \times 2$ , a fórmula (53) parece também preferível para achar a solução geral de sistemas  $2 \times 2$ .

**Nota 34.7.** É fácil obter uma expressão explícita para a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = y_0$$

A expressão para a solução é

$$y(t) = Y(t)Y(t_0)^{-1}y_0 + Y(t) \int_{t_0}^t Y(s)^{-1}b(s)ds$$

pois o primeiro termo da expressão é a solução do sistema homogéneo que verifica a condição inicial  $y(t_0) = y_0$  enquanto que o segundo termo é a solução particular do sistema não homogéneo que verifica a condição inicial  $y(t_0) = 0$ . A expressão anterior torna claro que a expressão (51) corresponde ao caso particular de (53) quando os coeficientes do sistema são constantes e tomamos  $Y(t) = e^{At}$ .

Notamos finalmente que a solução geral de equações lineares de ordem superior não homogéneas se obtém da Proposição 34.5 mediante a equivalência entre uma equação de ordem  $n$  e um sistema de  $n$  equações de primeira ordem dado pela Proposição 30.4.

**Proposição 34.8** (Fórmula de variação das constantes para equações escalares). *A solução geral da equação*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = b(t)$$

é dada por

(54)

$$y(t) = c_1y_1(t) + \dots + c_ny_n(t) + \begin{bmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \end{bmatrix} \int W(t)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix} dt \quad \text{com } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

onde  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  é uma base para as soluções da equação homogénea associada e  $W(t)$  é a matriz Wronskiana

$$W(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

*Dem. da Proposição 34.8.* De acordo com a Proposição 30.4, a equação do enunciado é equivalente ao sistema

$$(55) \quad \frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

e as soluções deste sistema são da forma  $(y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ . Uma base  $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$  das soluções da equação escalar homogénea  $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = 0$  dá uma base das soluções do sistema homogéneo equivalente. Por sua vez, esta base forma as colunas da solução matricial fundamental

$$W(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

(é tradicional usar a notação  $W(t)$  em vez de  $Y(t)$  para estes sistemas). Aplicando a fórmula (53) ao sistema (55) obtém-se

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = W(t) \left( \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + \int W(t)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix} dt \right), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

A fórmula (54) é simplesmente a primeira componente da equação vectorial anterior.  $\square$

**Nota 34.9.** A expressão dentro do integral na fórmula (54) depende apenas da última coluna da inversa da matriz Wronskiana, pelo que não é necessário calcular a inversa  $W(t)^{-1}$  completamente para aplicar a fórmula.

**Nota 34.10.** Novamente, no caso em que os coeficientes dependem do tempo não há nenhum método geral satisfatório para achar a base  $y_1(t), \dots, y_n(t)$ . Se os coeficientes são constantes, é muito fácil achar a base como vimos na Proposição 31.2.

**Exemplo 34.11.** Achar soluções da equação homogénea da forma  $y(t) = t^\alpha$  e resolver o problema de valor inicial

$$y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = t^3, \quad y(1) = y'(1) = 1.$$

Substituindo  $y(t) = t^\alpha$  na equação homogénea obtém-se

$$\alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2} + \alpha t^{\alpha-2} - t^{\alpha-2} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 = 0$$

Logo

$$y_1(t) = t, \quad y_2(t) = \frac{1}{t}$$

são soluções da equação homogénea. Uma vez que são linearmente independentes, formam uma base para as soluções. Assim uma matriz Wronskiana para a equação é dada por

$$W(t) = \begin{bmatrix} t & \frac{1}{t} \\ 1 & -\frac{1}{t^2} \end{bmatrix}$$

A inversa é dada por

$$W(t)^{-1} = \frac{1}{-\frac{2}{t}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t} \\ -1 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2t} & \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} & -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

Substituindo em (54) obtemos

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 t + c_2 \frac{1}{t} + \begin{bmatrix} t & \frac{1}{t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{s^2}{2} \end{bmatrix} s^3 ds \\ &= c_1 t + c_2 \frac{1}{t} + \begin{bmatrix} t & \frac{1}{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{t^4}{8} \\ -\frac{t^6}{12} \end{bmatrix} \\ &= c_1 t + c_2 \frac{1}{t} + \frac{t^5}{8} - \frac{t^5}{12} \\ &= c_1 t + c_2 \frac{1}{t} + \frac{t^5}{24} \end{aligned}$$

Portanto  $y'(t) = c_1 - c_2 \frac{1}{t^2} + \frac{5t^4}{24}$  e substituindo nas condições iniciais obtemos o sistema para  $c_1, c_2$  obtemos

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{24} = 1 \\ c_1 - c_2 + \frac{5}{24} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{7}{8} \\ c_2 = \frac{1}{12} \end{cases}$$

A solução do problema de valor inicial é portanto

$$y(t) = \frac{7t}{8} + \frac{1}{12t} + \frac{t^5}{24}.$$

### 35. MÉTODO DE SEPARAÇÃO DAS VARIÁVEIS

**35.1. Introdução às equações diferenciais parciais.** Uma equação diferencial parcial (ou uma equação às derivadas parciais) é uma equação cuja incógnita é uma função de várias variáveis e que envolve as derivadas parciais da incógnita. Eis alguns exemplos simples que aparecem por todo o lado nas aplicações da Matemática à Física e Engenharia:

- A equação do calor:  $\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  para uma incógnita  $u = u(x, t)$ . Esta equação modela a evolução no tempo da temperatura numa barra homogénea. A variável  $x$  indica o ponto da barra e  $t$  o tempo.  $K$  é uma constante, chamada a difusibilidade térmica, que depende do material de que é feita a barra.
- A equação das ondas:  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  para uma incógnita  $u = u(x, t)$ . Esta equação modela a evolução no tempo de uma corda vibrante. A coordenada  $x$  parametriza os pontos da corda e  $t$  é o tempo. A constante  $c$  é a velocidade de onda e é determinada pelo material que constitui a corda.
- A equação de Laplace:  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ . A incógnita é uma função  $u = u(x, y)$ . A equação de Laplace descreve por exemplo um potencial escalar para a velocidade de escoamento no plano de um fluido incompressível e irrotacional.

Todas as equações anteriores admitem versões em que as incógnitas são funções de várias variáveis. Por exemplo a equação das ondas tridimensionais é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

com incógnita uma função  $u = u(x, y, z, t)$ . Tal como as equações diferenciais ordinárias, as equações diferenciais parciais admitem em geral infinitas soluções e é necessário impôr condições adicionais à incógnita para que se obtenha uma única solução. Estas condições adicionais variam de equação para equação e a interpretação Física das equações é frequentemente útil para encontrar condições adicionais adequadas. Por exemplo, no caso da equação do calor é razoável pensar que a evolução da temperatura numa barra é determinada pela distribuição inicial de temperatura (que se chama uma *condição inicial*) juntamente com o conhecimento da temperatura a que são mantidas as extremidades da barra (que se chamam *condições na fronteira*), e isto pode de facto ser demonstrado.

As equações às derivadas parciais são muito mais complicadas do que as equações diferenciais ordinárias. Não existe nenhuma teoria geral que garanta existência ou unicidade de soluções. Na realidade é possível escrever equações às derivadas parciais com um aspecto muito simples que não têm qualquer solução, e a demonstração da existência de soluções para uma das equações mais utilizadas na modelação da aerodinâmica - a equação de Navier-Stokes em três dimensões - é um dos problemas do Milénio cuja solução seria recompensada com um prémio de um milhão de dólares.

**35.2. Método de separação das variáveis.** Como introdução às equações diferenciais parciais, vamos apresentar o método de separação das variáveis (ou método de Fourier) que permite resolver algumas equações diferenciais parciais lineares (incluindo as mencionadas no parágrafo anterior) quando sujeitas a *algumas* condições adicionais.

Vamos ilustrar o método de separação das variáveis através da resolução de um problema de valor inicial e na fronteira para a equação de calor. Consideremos o problema

$$(56) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \text{ para } t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) \text{ para } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

O método de separação das variáveis tem três passos:

**Passo 1:** Determinar todas as soluções da equação diferencial parcial que são produto de funções de cada uma das variáveis.

No exemplo que estamos a considerar, escrevemos  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , onde  $X$  e  $T$  são funções de uma variável a determinar. Substituindo na equação obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (X(x)T(t)) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (X(x)T(t)) \\ X(x)T'(t) &= X''(x)T(t) \\ \frac{T'(t)}{T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} \end{aligned}$$

A última igualdade entre funções de variáveis distintas só se pode verificar se ambas as funções forem constantes (e ambas iguais à mesma constante, que designaremos por  $\lambda$ ). Isto é, a última igualdade é equivalente a

$$\begin{cases} \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \\ \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T'(t) = \lambda T(t) \\ X''(x) = \lambda X(x) \end{cases} \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{R}$$

As equações anteriores são equações lineares de coeficientes constantes, cujas soluções são dadas pela Proposição 31.2. Para a primeira equação temos para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(D - \lambda)T = 0 \Leftrightarrow T(t) = ce^{\lambda t}, \text{ com } c \in \mathbb{R}$$

A solução da segunda equação para  $X$  depende do sinal de  $\lambda$ :

$$(57) \quad (D^2 - \lambda)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0 \\ X(x) = c_1 + c_2 x & \text{se } \lambda = 0 \\ X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x) & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

Obtemos assim uma enorme quantidade de soluções da equação do calor da forma  $X(x)T(t)$ :

$$(58) \quad \begin{aligned} u(x, t) &= (c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}) e^{\lambda t} \text{ para todos os } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ e } \lambda > 0 \\ u(x, t) &= c_1 + c_2 x, \text{ para } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ (correspondendo ao caso em que } \lambda = 0) \\ u(x, t) &= (c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)) e^{\lambda t} \text{ para todos os } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ e } \lambda < 0 \end{aligned}$$

Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos assim um espaço vectorial de dimensão 2 de soluções. Note-se que omitimos a constante do factor  $T(t)$  uma vez que esta pode ser absorvida pelas constantes do factor  $X(x)$ .

O passo seguinte do método identifica a pequena minoria das soluções encontradas neste passo que se adequam ao problema a resolver.

**Passo 2:** Determinar quais as soluções encontradas no Passo 1 que satisfazem as condições adicionais impostas à equação que são *homogéneas* (isto é, iguais a 0).

No nosso exemplo trata-se de identificar quais das soluções (58) que satisfazem as condições na fronteira

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

Substituindo  $u(x, t) = X(x)T(t)$  nas condições anteriores obtém-se

$$\begin{cases} X(0)T(t) = 0 \\ X(1)T(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \text{ ou } T(t) = 0 \\ X(1) = 0 \text{ ou } T(t) = 0 \end{cases}$$

Se tomarmos  $T(t) = 0$  obtemos a solução trivial  $u(x, t) = 0$  pelo que descartamos esta hipótese. Temos portanto que impôr as condições  $X(0) = X(1) = 0$  às soluções encontradas em (57). Há vários casos a considerar:

- $\lambda > 0$ : Substituindo na expressão para  $X(x)$  obtemos

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_1 (e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

Conclui-se que nenhuma das soluções obtidas para  $\lambda > 0$  satisfaz as condições na fronteira homogéneas.

- $\lambda = 0$ :

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 \cdot 0 = 0 \\ c_1 + c_2 \cdot 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Pelo que também nenhuma das soluções obtidas quando  $\lambda = 0$  satisfaz as condições na fronteira homogéneas.

- $\lambda < 0$ :

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \\ c_1 \cos \sqrt{-\lambda} + c_2 \sin \sqrt{-\lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \text{ ou } \sin \sqrt{-\lambda} = 0 \end{cases}$$

A opção  $c_1 = c_2 = 0$  corresponde à solução trivial  $X(x) = 0$  que podemos descartar. Há no entanto outras soluções:

$$\sin \sqrt{-\lambda} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda} = n\pi \Leftrightarrow \lambda = -n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

(onde eliminámos a solução correspondente a  $n = 0$  porque  $\lambda < 0$  e notámos que os valores de  $\lambda$  são independentes do sinal de  $n$  e por isso basta considerar valores positivos de  $n$ ).

Conclui-se assim que para cada  $n = 1, 2, \dots$  e  $c_2 \in \mathbb{R}$  as funções

$$u(x, t) = c_2 \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}$$

são soluções da equação do calor que satisfazem as condições na fronteira homogênea.

**Passo 3:** Procurar uma "combinação linear" das soluções obtidas no passo 2 do método que satisfaça a condição adicional que não é identicamente nula.

A razão das aspas é que não é em geral possível encontrar uma combinação linear finita. Vamos assim procurar uma combinação linear infinita, ou seja os coeficientes de uma série. Num estudo mais rigoroso seria necessário verificar que estas "combinações lineares" infinitas satisfazem a equação diferencial parcial (pois não é automático que as derivadas parciais possam ser trocadas com a série). Por uma questão de tempo não iremos aqui tratar esta questão, referindo os alunos interessados ao excelente livro [GF] que contém um tratamento rigoroso destas questões assim como da Análise de Fourier acessível a alunos com as vossas bases matemáticas.

No nosso exemplo (56) este passo do método consiste em encontrar constantes  $c_n \in \mathbb{R}$  tais que

$$(59) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}$$

satisfaça a condição

$$u(x, 0) = f(x)$$

ou seja, de constantes  $c_n \in \mathbb{R}$ , tais que

$$(60) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(n\pi x) = f(x)$$

Põe-se agora a questão se é sempre possível achar coeficientes  $c_n$  tais que a igualdade (60) seja satisfeita. Para certas funções  $f(x)$ , nomeadamente as combinações lineares finitas de funções  $\operatorname{sen}(nx)$ , é claro que sim.

**Exemplo 35.3.** *Determinar uma solução do problema de valor inicial e na fronteira para a equação do calor:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \text{ para } t \geq 0 \\ u(x, 0) = \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{sen}(5x) \text{ para } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*De acordo com o que vimos acima temos que resolver a equação*

$$c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \operatorname{sen}(2x) + c_3 \operatorname{sen}(3x) + \dots = \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{sen}(5x)$$

*Mas é claro que uma solução é dada por  $c_1 = 1$ ,  $c_5 = -3$  e  $c_n = 0$  para  $n \neq 1, 5$ . Conclui-se que*

$$u(x, t) = \operatorname{sen}(x)e^{-\pi^2 t} - 3 \operatorname{sen}(5x)e^{-25\pi^2 t}$$

*é uma solução do problema.*

Em geral, é impossível resolver a equação (60) por inspeção como fizemos no exemplo anterior. É no entanto uma consequência de um Teorema notável de Fourier que dada uma função "razoável"  $f(x)$  é de facto possível resolver a equação (60) para os coeficientes  $c_n$ . A equação representa um desenvolvimento de  $f(x)$  em série de funções trigonométricas que se designa por *série de Fourier*. Interrompemos agora durante algum tempo o estudo das equações diferenciais parciais para explicar como calcular tais desenvolvimentos.

### 36. SÉRIES DE FOURIER

Começamos por definir a classe de funções "razoáveis" que iremos considerar.

**Definição 36.1.** *Sejam  $a < b$  dois números reais. Uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se seccionalmente  $C^1$  se existe uma partição do intervalo  $[a, b]$  num conjunto finito de subintervalos  $J$  tais que*

- *A restrição de  $f$  ao interior de cada subintervalo  $J$  tem derivada contínua,*
- *Existem os limites laterais de  $f$  e  $f'$  em cada extremo de cada subintervalo  $J$ .*

**Exemplo 36.2.** *A função  $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -2 \leq x \leq -1, \\ x^2 & \text{se } -1 < x \leq 1, \\ 0 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

*é seccionalmente  $C^1$ .*

Note-se que uma função seccionalmente  $C^1$  é contínua excepto possivelmente num número finito de pontos no interior do seu domínio. Além disso, existem os limites laterais de  $f$  nos pontos de descontinuidade de  $f$ . Vamos escrever  $f(x^+)$  para o limite à direita e  $f(x^-)$  para o limite à esquerda em  $x$ .

**Definição 36.3.** *Seja  $\ell > 0$  e  $f: [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Um desenvolvimento de  $f$  em série de Fourier é uma expressão da forma*

$$(61) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right)$$

Um desenvolvimento de Fourier é portanto a expressão de uma função  $f$  como série de funções sinusoidais. É análogo aos desenvolvimentos em série de potências que estudámos antes nesta cadeira.

**Teorema 36.4** (Teorema de Fourier). *Seja  $\ell > 0$  e  $f: [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente  $C^1$ . Então existem coeficientes  $a_n$  para  $n \geq 0$  e  $b_n$  para  $n \geq 1$  únicos tais que*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right)$$



para todo o ponto  $x \in ]-\ell, \ell[$  em que  $f$  seja contínua. Além disso

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \text{ para } n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \text{ para } n \geq 1$$

A série de Fourier converge para todo o  $x \in [-\ell, \ell]$  sendo a sua soma

$$\begin{cases} f(x) & \text{se } -\ell < x < \ell \text{ e } f \text{ é contínua em } x, \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{se } -\ell < x < \ell \text{ e } f \text{ é descontínua em } x, \\ \frac{f(-\ell^+) + f(\ell^-)}{2} & \text{se } x = \pm\ell. \end{cases}$$

Não iremos dar sequer a ideia da demonstração deste Teorema. Começamos por ilustrar o que o Teorema de Fourier diz sobre a convergência no caso da função do Exemplo 36.2.

**Exemplo 36.5.** Sendo  $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  a função do Exemplo 36.2, a série de Fourier de  $f$  toma a forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right)$$

e o Teorema diz que a soma da série de Fourier é

$$s(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = -2 \\ x & \text{se } -2 < x < -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \\ x^2 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2 \\ -1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Recorde-se que uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se diz *periódica* com período  $T$  se  $f(x+T) = f(x)$ . Por exemplo, as funções  $\operatorname{sen} x$  e  $\cos x$  são periódicas com período  $2\pi$ . Geometricamente a periodicidade de uma função traduz-se no facto de o seu gráfico ser invariante mediante translações por (múltiplos inteiros de)  $T$  na direcção do eixo dos  $x$ .

**Nota 36.6.** As funções  $\frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$  e  $\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$  utilizadas no desenvolvimento de Fourier (61) são periódicas com período  $2\ell$  (o comprimento do intervalo  $[-\ell, \ell]$ ) e portanto a função definida pela soma da série de Fourier é também periódica com período  $2\ell$ . O Teorema de Fourier dá-nos portanto a soma da série de Fourier em qualquer ponto  $x \in \mathbb{R}$ . Por exemplo, tendo em conta o resultado apresentado no Exemplo (36.5), a soma da série de Fourier da função do Exemplo 36.2 é periódica com período 4 e no ponto  $x = 11$  toma o valor

$$s(11) = s(-1 + 4 \cdot 3) = s(-1) = 0.$$

A observação anterior sugere que devemos considerar desenvolvimentos de Fourier de funções periódicas. Uma função periódica é completamente determinada pelos valores que toma num intervalo de comprimento igual ao período, e reciprocamente, se  $f$  é uma função definida num intervalo de comprimento  $T$ , existe um único prolongamento de  $f$  a  $\mathbb{R}$  com período  $T$ . O Teorema de Fourier 36.4 pode portanto ser interpretado como dando uma expansão em série de funções trigonométricas para funções com período  $2\ell$ .

Este ponto de vista torna também claro como achar o desenvolvimento de Fourier de uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ : é o desenvolvimento de Fourier da função obtida por prolongamento de  $f$  a uma função periódica em  $\mathbb{R}$  com período  $b - a$ .

**Nota 36.7.** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2\ell$ , que é seccionalmente  $C^1$  num intervalo de comprimentos  $2\ell$  contido no domínio. A afirmação relativa à convergência da série de Fourier no Teorema 36.4 diz que a série de Fourier de  $f$  converge para

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$  (note-se que esta expressão coincide com  $f(x)$  nos pontos  $x$  onde  $f$  é contínua). O papel excepcional desempenhado pelos extremos do intervalo no enunciado do Teorema 36.4 é assim eliminado quando a série de Fourier é interpretada como a expansão de uma função periódica.

**Exemplo 36.8.** Calcular o desenvolvimento em série de Fourier da função  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x$ .

Temos  $\ell = 1$ , logo, de acordo com o Teorema 36.4, os coeficientes do desenvolvimento são dados pelas fórmulas

$$a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 x \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \int_{-1}^1 x \cos(n\pi x) dx = 0$$

(pois a função integranda é ímpar) e

$$b_n = \int_{-1}^1 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx$$

(pois a função integranda é par). Podemos calcular o integral anterior por partes:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx &= -x \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n^2\pi^2} \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + 0 \end{aligned}$$

Conclui-se portanto do Teorema 36.4 que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x), \quad \text{para todo o } x \in ]-1, 1[.$$

Para  $x = \pm 1$  o Teorema diz que a série converge para 0, o que aliás se verifica imediatamente por substituição na série.

Este exemplo mostra bem a não trivialidade do Teorema de Fourier. A expressão anterior para  $x$  calcula uma infinidade de somas de séries não triviais. Considere-se por exemplo a expressão que se obtém substituindo  $x$  por  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Conseguir-se-ia calcular a soma da série de outra forma?

Note-se também que achámos os coeficientes necessários para terminar a solução do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \text{ para } t \geq 0 \\ u(x, 0) = x \text{ para } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

conforme (60). De acordo com (59), a solução do problema é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}$$

**Exemplo 36.9.** Determinar a série de Fourier da função  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \cos^2 x$ .

Uma vez que  $\ell = \pi$ , pretendemos achar  $a_n$  e  $b_n$  tais que

$$\cos^2 x = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + \dots + b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen}(2x) + \dots$$

A fórmula trigonométrica

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

permite expressar a função  $\cos^2 x$  como

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x).$$

Uma vez que o desenvolvimento em série de Fourier é único conclui-se que a última equação é o desenvolvimento de  $\cos^2 x$  em série de Fourier. Isto é que

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ \frac{1}{2} & \text{se } n = 2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad b_n = 0 \text{ para todo } n \geq 1.$$

**Nota 36.10.** Mais geralmente, a fórmula de deMoivre  $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)$  pode ser usada para obter indutivamente expressões para  $\cos^n x$  e  $\operatorname{sen}^n x$  como combinações lineares das funções  $\cos(kx)$  e  $\operatorname{sen}(kx)$  com  $k \leq n$  (exercício).

**36.11. Séries de senos e cosenos.** Recorde-se que uma função  $f: [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  se diz par se  $f(x) = f(-x)$  e ímpar se  $f(-x) = -f(x)$ . É uma consequência imediata da regra dos sinais que o produto de duas funções pares, ou de duas funções ímpares é par e que o

produto de uma função par com uma função ímpar é ímpar. Note-se também que se tem

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } f \text{ é ímpar,} \\ 2 \int_0^{\ell} f(x)dx & \text{se } f \text{ é par.} \end{cases}$$

As observações anteriores têm as seguintes consequências relativamente à série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) \right)$$

de uma função  $f: [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ :

- Se  $f$  é par, então

$$b_n = 0 \text{ para todo o } n \geq 1 \quad \text{e } a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

De facto, se  $f$  é par, as funções integrandas nas fórmulas para os coeficientes  $b_n$  no Teorema 36.4 são ímpares (porque as funções  $\operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right)$  são ímpares) logo os integrais em questão são nulos. Analogamente, as funções integrandas nas fórmulas para os coeficientes  $a_n$  são pares (porque as funções  $\cos \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right)$  são pares) e portanto a fórmula para  $a_n$  no Teorema 36.4 é equivalente à expressão dada acima.

- Se  $f$  é ímpar, então um raciocínio análogo mostra que

$$a_n = 0 \text{ para todo o } n \geq 0 \quad \text{e } b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

Podemos usar as expressões acima para escrever séries trigonométricas que convergem para uma função  $f: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  e que usam apenas funções seno ou funções coseno. Tais desenvolvimentos em série são fundamentais para a resolução de equações diferenciais parciais pelo método de separação de variáveis.

Por exemplo, se prolongarmos  $f$  a uma função ímpar  $\bar{f}: [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  pela expressão

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 \leq x \leq \ell \\ -f(-x) & \text{se } -\ell \leq x < 0 \end{cases}$$

então a série de Fourier de  $\bar{f}$  terá todos os coeficientes  $a_n = 0$ , ou seja, teremos

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) \quad \text{para } -\ell \leq x \leq \ell$$

e uma vez que  $\bar{f}(x) = f(x)$  para  $x \in [0, \ell]$ , isso significa em particular que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) \quad \text{para } 0 \leq x \leq \ell$$

A expressão anterior diz-se a *série de senos* da função  $f: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ . Os coeficientes são dados pela expressão

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \bar{f}(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) dx$$

Analogamente, prolongando  $f$  a uma função par definida em  $[-\ell, \ell]$  obtemos uma expressão da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) \text{ para } 0 \leq x \leq \ell$$

que se chama a *série de cosenos* de  $f$ . Os coeficientes são dados pela expressão

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

O valor da soma das séries de senos e cosenos é dada pelo Teorema 36.4, uma vez que estas séries não são mais do que as séries de Fourier dos prolongamentos ímpares ou pares da função  $f$ .

**Exemplo 36.12.** Determinar a série de senos da função  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 1$ .

Uma vez que  $\ell = 1$ , os coeficientes  $b_n$  da série de senos são dados por

$$b_n = \frac{2}{1} \int_0^1 1 \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{1} \right) = 2 \left. \frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} \right|_0^1 = 2 \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}$$

a série de senos de  $f$  é portanto dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

De acordo com o Teorema 36.4, esta série converge para 1 se  $0 < x < 1$  e para 0 se  $x = 0$  ou  $x = 1$ .

**36.13. O significado das séries de Fourier.** Uma série de Fourier expressa uma função  $f: [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  (ou equivalentemente uma função periódica de período  $2\ell$ ) como uma soma de funções sinusoidais - as funções usadas no desenvolvimento são

$$\frac{1}{2}, \quad \cos \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

Vale a pena gastar algum tempo a desenhar o gráfico das primeiras 4 ou 5 funções. À medida que  $n$  aumenta as oscilações das funções são cada vez mais rápida. O conteúdo intuitivo do Teorema de Fourier é que através de uma escolha judiciosa de coeficientes é possível fazer com que as oscilações destas funções se cancelem mutuamente de forma milagrosa de forma a produzir (essencialmente) uma função  $f$  arbitrária.

Sugere-se aos alunos interessados que experimentem o [applet](#) que calcula desenvolvimentos de Fourier aproximados que pode ser encontrado na secção "Materiais de estudo - ligações interessantes" da página da cadeira.

**36.14. De onde vêm as fórmulas para os coeficientes de Fourier?** As fórmulas integrais para os coeficientes da série de Fourier são na realidade especializações das fórmulas aprendidas em Álgebra Linear para achar as coordenadas de um vector numa base ortogonal. De facto, seja  $V$  o espaço vectorial real das funções  $[-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  (ou periódicas com período  $2\ell$ ) seccionalmente  $C^1$ . Neste espaço vectorial podemos definir um produto interno pela expressão

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\ell}^{\ell} f(x)g(x)dx.$$

É imediato verificar os axiomas para um produto interno:

- (1) Simetria: É imediato que  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ .
- (2) (Bi)linearidade: A propriedade  $\langle \alpha f_1 + \beta f_2, g \rangle = \alpha \langle f_1, g \rangle + \beta \langle f_2, g \rangle$  é uma consequência da linearidade do integral.
- (3) Positividade: Claramente  $\langle f, f \rangle \geq 0$  e a condição  $\langle f, f \rangle = \int_{-\ell}^{\ell} f(x)^2 dx = 0$  implica que a função  $f$  (que é seccionalmente contínua) é identicamente nula (excepto possivelmente num número finito de pontos).

É fácil, embora um pouco trabalhoso, verificar que as funções usadas no desenvolvimento de Fourier, nomeadamente

$$(62) \quad \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

são ortogonais com respeito ao produto interno definido acima. Vamos por exemplo ver que a função  $\frac{1}{2}$  é ortogonal às funções  $\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ :

$$\left\langle \frac{1}{2}, \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right\rangle = \int_{-\ell}^{\ell} \frac{1}{2} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = \frac{\ell}{2n\pi} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \Big|_{-\ell}^{\ell} = 0$$

A ortogonalidade com as funções  $\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$  é análoga e as relações de ortogonalidade envolvendo as funções  $\text{sen}$  e  $\text{cos}$  verificam-se integrando duas vezes por partes (exercício).

A norma das funções (62) (com respeito ao produto interno que estamos a considerar) é também fácil de calcular:

$$\left\| \frac{1}{2} \right\|^2 = \int_{-\ell}^{\ell} \frac{1}{4} dx = \frac{\ell}{2}$$

e

$$\left\| \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right\|^2 = \left\| \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right\|^2 = \ell$$

Estas últimas igualdades podem ser verificadas integrando por partes duas vezes, ou, mais rapidamente, notando que claramente

$$\left\| \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right\|^2 + \left\| \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right\|^2 = \int_{-\ell}^{\ell} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = \int_{-\ell}^{\ell} 1 dx = 2\ell$$

e que as normas têm que ser iguais, uma vez que as funções em questão têm ambas período  $2\ell$  e se obtêm uma da outra por translação.

Recorde-se finalmente que se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é uma base ortogonal para um espaço vectorial  $V$  com produto interno e  $v \in V$  então

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

sendo os coeficientes da expressão de  $v$  nesta base dados pela fórmula

$$c_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$$

Aplicando formalmente estas fórmulas ao produto interno definido pelo integral obtemos a seguinte fórmula para o coeficiente de uma função  $f$  segundo o vector  $\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ :

$$\frac{\langle f(x), \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \rangle}{\left\| \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right\|^2} = \frac{1}{\ell} \left\langle f(x), \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right\rangle = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx$$

que é exactamente a fórmula para o coeficiente  $b_n$  na série de Fourier. Fica como exercício para os alunos interessados verificar que da mesma forma se obtém as fórmulas para os coeficientes  $a_n$  com  $n \geq 0$ .

Deste ponto de vista, o Teorema de Fourier diz que as funções listadas em (62) são uma "base ortogonal" do espaço vectorial das funções periódicas de período  $2\ell$ . As aspas indicam que esta afirmação deve ser interpretada com um pouco de imaginação uma vez que estamos a admitir combinações lineares infinitas.

### 37. MAIS EXEMPLOS DO MÉTODO DE SEPARAÇÃO DAS VARIÁVEIS

**Exemplo 37.1.** *Determinar uma solução para o problema de valor inicial e fronteira para a equação das ondas dado por*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(2, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f(x) \text{ para } 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{com } f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

*Este exemplo descreve a evolução de uma corda vibrante cujos pontos são parametrizados por  $x \in [0, 2]$ . As condições adicionais que determinam uma solução da equação são a posição e velocidade iniciais  $u(x, 0)$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$  da corda (que se chamam condições iniciais) e as condições sobre as extremidades da corda  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(2, t) = 0$ . Fisicamente podemos imaginar que as extremidades estão livres para oscilar verticalmente numa calha, mas a corda sai da calha na posição horizontal. Estas últimas condições chamam-se condições na fronteira de Neumann.*

*Vamos então aplicar o método de separação das variáveis a este problema.*

**Passo 1:** *Substituindo  $u(x, t) = X(x)T(t)$  na equação diferencial parcial obtemos*

$$X(x)T''(t) = 9X''(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = 9 \frac{X''(x)}{X(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda \\ \frac{9X''(x)}{X(x)} = \lambda \end{cases} \quad \text{para alguma } \lambda \in \mathbb{R}$$

O sistema anterior é equivalente a

$$\begin{cases} (D^2 - \lambda)T = 0 \\ (D^2 - \frac{\lambda}{9})X = 0 \end{cases}$$

e há três casos a considerar para as soluções:

- $\lambda > 0$ : As soluções são

$$T(t) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}t}, \quad X(x) = d_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{3}x} + d_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{3}x}$$

- $\lambda = 0$ : As soluções são

$$T(t) = c_1 + c_2 t, \quad X(x) = d_1 + d_2 x$$

- $\lambda < 0$ : As soluções são

$$T(t) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}t) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}t), \quad X(x) = d_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{3}x\right) + d_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{3}x\right)$$

onde  $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ .

**Passo 2:** As condições na fronteira homogêneas são

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = X'(0)T(t) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(2, t) = X'(2)T(t) = 0 \\ u(x, 0) = X(x)T(0) = 0 \end{cases}$$

Para que uma solução  $X(x)T(t)$  da equação diferencial parcial satisfaça estas condições e não seja a solução identicamente nula ter-se-á necessariamente

$$X'(0) = 0, \quad X'(2) = 0, \quad T(0) = 0$$

- $\lambda > 0$ : Temos

$$X'(x) = d_1 \frac{\sqrt{\lambda}}{3} e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{3}x} - d_2 \frac{\sqrt{\lambda}}{3} e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{3}x}$$

logo

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \frac{\sqrt{\lambda}}{3} - c_2 \frac{\sqrt{\lambda}}{3} = 0 \\ c_1 \frac{\sqrt{\lambda}}{3} e^{2\frac{\sqrt{\lambda}}{3}} - \frac{\sqrt{\lambda}}{3} c_2 e^{-2\frac{\sqrt{\lambda}}{3}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = c_1 \\ c_1 \frac{\sqrt{\lambda}}{3} \left( e^{2\frac{\sqrt{\lambda}}{3}} - e^{-2\frac{\sqrt{\lambda}}{3}} \right) = 0 \end{cases}$$

e portanto  $X(x) = 0$ . Conclui-se que nenhuma das soluções obtidas no passo 1 com  $\lambda > 0$  satisfaz as condições na fronteira homogêneas.

- $\lambda = 0$ : Temos  $X'(x) = d_2$  logo as condições  $X'(0) = X'(2) = 0$  são equivalentes a  $d_2 = 0$ . Como  $T(t) = c_1 + c_2 t$ , a condição  $T(0) = 0$  é equivalente a  $c_1 = 0$ . Obtemos assim a seguinte solução da equação diferencial parcial que satisfaz as condições na fronteira homogêneas:

$$u(x, t) = X(x)T(t) = ct \text{ com } c \in \mathbb{R}.$$



- $\lambda < 0$ : Temos

$$X'(x) = -d_1 \frac{\sqrt{-\lambda}}{3} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{-\lambda}}{3} x \right) + d_2 \frac{\sqrt{-\lambda}}{3} \cos \left( \frac{\sqrt{-\lambda}}{3} x \right)$$

logo

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -d_1 \frac{\sqrt{-\lambda}}{3} \cdot 0 + d_2 \frac{\sqrt{-\lambda}}{3} = 0 \\ -d_1 \frac{\sqrt{-\lambda}}{3} \operatorname{sen} \left( 2 \frac{\sqrt{-\lambda}}{3} \right) + d_2 \frac{\sqrt{-\lambda}}{3} \cos \left( 2 \frac{\sqrt{-\lambda}}{3} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_2 = 0 \\ d_1 \frac{\sqrt{-\lambda}}{3} \operatorname{sen} \left( 2 \frac{\sqrt{-\lambda}}{3} \right) = 0 \end{cases}$$

Obtêm-se soluções não identicamente nulas quando

$$\operatorname{sen} \left( 2 \frac{\sqrt{-\lambda}}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{\sqrt{-\lambda}}{3} = n\pi \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda} = \frac{3n\pi}{2} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{9n^2\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Obtemos assim as soluções

$$X(x) = d_1 \cos \left( \frac{n\pi}{2} x \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A condição  $T(0) = 0$  é equivalente a  $c_1 = 0$  na fórmula para  $T(t)$  pelo que

$$T(t) = c_2 \operatorname{sen} \left( \frac{3n\pi}{2} t \right)$$

e concluímos portanto que os múltiplos das funções

$$u(x, t) = \cos \left( \frac{n\pi}{2} x \right) \operatorname{sen} \left( \frac{3n\pi}{2} t \right)$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots$  satisfazem a equação diferencial parcial e as condições adicionais homogêneas.

**Passo 3:** Vamos procurar uma combinação linear

$$u(x, t) = c_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \left( \frac{n\pi}{2} x \right) \operatorname{sen} \left( \frac{3n\pi}{2} t \right)$$

que satisfaça a última condição adicional

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f(x).$$

Derivando (formalmente) a expressão para  $u(x, t)$  obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{3n\pi}{2} \cos \left( \frac{n\pi}{2} x \right) \cos \left( \frac{3n\pi}{2} t \right)$$

logo temos que resolver a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{3n\pi}{2} \cos \left( \frac{n\pi}{2} x \right) = f(x)$$

e vemos que os coeficientes  $c_n$  são determinados pelas fórmulas para os coeficientes  $a_n$  da série de cosenos de  $f(x)$  no intervalo  $[0, 2]$ . A relação entre os coeficientes  $c_n$  e os coeficientes  $a_n$  é

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n \frac{3n\pi}{2} = a_n$$

Portanto

$$c_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) dx \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 3 dx = \frac{3}{2}$$

e

$$c_n = \frac{2}{3n\pi} \int_0^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \Big|_0^1 = \frac{4 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}$$

Obtemos finalmente a seguinte expressão para a solução do problema:

$$u(x, t) = \frac{3t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3n\pi}{2}t\right)$$

O seguinte exemplo ilustra como proceder quando mais do que uma das condições adicionais impostas à equação diferencial parcial é não homogénea. Essencialmente temos que usar a linearidade da equação e condições adicionais para reduzir o problema ao caso em que apenas uma das condições adicionais é não homogénea.

**Exemplo 37.2.** Determinar uma solução para o problema de valor na fronteira para a equação de Laplace no quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ u(1, y) = u(x, 1) = 0, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ u(x, 0) = \operatorname{sen}(\pi x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, y) = -5 \operatorname{sen}(3\pi y), & 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

A solução deste problema pode ser obtida somando as soluções  $u_1$  e  $u_2$  dos problemas

$$\mathbf{1} : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(1, y) = u(x, 1) = 0 \text{ para } 0 \leq x, y \leq 1 \\ u(x, 0) = \operatorname{sen}(\pi x) \text{ para } 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, y) = 0 \text{ para } 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad \mathbf{2} : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(1, y) = u(x, 1) = 0 \text{ para } 0 \leq x, y \leq 1 \\ u(x, 0) = 0 \text{ para } 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, y) = -5 \operatorname{sen}(3\pi y) \text{ para } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

cada um dos quais tem apenas uma condição na fronteira não homogénea. Vamos aplicar o método de separação das variáveis a ambos os problemas simultaneamente:

**Passo 1:** Vamos achar as soluções da equação de Laplace da forma  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ :

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

A equação anterior é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \\ \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (D^2 - \lambda)X = 0 \\ (D^2 + \lambda)Y = 0 \end{cases}$$

Cujas soluções são:

- $\lambda > 0$ :

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad Y(y) = d_1 \cos(\sqrt{\lambda}y) + d_2 \sin(\sqrt{\lambda}y)$$

- $\lambda = 0$ :

$$X(x) = c_1 + c_2 x, \quad Y(y) = d_1 + d_2 y$$

- $\lambda < 0$ :

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x), \quad Y(y) = d_1 e^{\sqrt{-\lambda}y} + d_2 e^{-\sqrt{-\lambda}y}$$

**Passo 2:** Vamos determinar quais das soluções  $X(x)Y(y)$  do passo anterior satisfazem as condições na fronteira homogêneas. Para o problema 1 temos

$$X(1)Y(y) = X(x)Y(1) = X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(1) = Y(1) = X(0) = 0$$

(senão as soluções obtidas serão nulas). Entre todas as possibilidades para as funções  $X(x)$ , as únicas que se podem anular em dois pontos distintos (neste caso  $x = 0$  e  $x = 1$ ) sem ser identicamente nulas são as funções sinusoidais (ver os cálculos análogos na Secção 35.2). A constante  $\lambda$  tem portanto de ser negativa. Para estas soluções temos

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \text{ ou } \sin(\sqrt{-\lambda}) = 0 \end{cases}$$

Portanto obtemos soluções não nulas quando

$$\sqrt{-\lambda} = n\pi \Leftrightarrow \lambda = -n^2\pi^2, n = 1, 2, 3, \dots$$

A condição  $Y(1) = 0$  é equivalente a

$$d_1 e^{n\pi} + d_2 e^{-n\pi} = 0 \Leftrightarrow d_2 = -e^{2n\pi} d_1$$

portanto obtemos como soluções das condições homogêneas de 1 os múltiplos de

$$u(x, y) = X(x)Y(y) = \sin(n\pi x) (e^{n\pi y} - e^{n\pi(2-y)}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Para o problema 2 temos

$$X(1)Y(y) = X(x)Y(1) = X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow X(1) = Y(1) = Y(0) = 0$$

(senão as soluções obtidas serão nulas). Entre todas as possibilidades para as funções  $Y(y)$ , as únicas que se podem anular em dois pontos distintos (neste caso  $y = 0$  e  $y = 1$ ) sem ser identicamente nulas são as funções sinusoidais (ver os cálculos análogos na Secção 35.2). A constante  $\lambda$  tem portanto de ser positiva. Para estas soluções temos

$$\begin{cases} Y(0) = 0 \\ Y(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = 0 \\ d_2 = 0 \text{ ou } \sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases}$$

Portanto obtemos soluções não nulas quando

$$\sqrt{\lambda} = n\pi \Leftrightarrow \lambda = n^2\pi^2, n = 1, 2, 3, \dots$$

A condição  $X(1) = 0$  é equivalente a

$$c_1 e^{n\pi} + c_2 e^{-n\pi} = 0 \Leftrightarrow c_2 = -e^{2n\pi} c_1$$

portanto obtemos como soluções das condições homogêneas de **2** os múltiplos de

$$u(x, y) = X(x)Y(y) = (e^{n\pi x} - e^{n\pi(2-x)}) \operatorname{sen}(n\pi y), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Note-se que teria sido mais inteligente explorar a simetria da situação. As condições do problema **2** obtêm-se a partir das do problema **1** trocando  $x$  com  $y$ , logo o mesmo é verdade para as respectivas soluções. Escolhemos este caminho mais longo para ilustrar que nem sempre o caso a considerar é aquele em que o parâmetro  $\lambda$  é negativo.

**Passo 3:** Do passo anterior obtemos as seguintes "soluções gerais" para a equação de Laplace mais as condições na fronteira homogêneas:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}: \quad u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(n\pi x) (e^{n\pi y} - e^{n\pi(2-y)}) \\ \mathbf{2}: \quad u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n (e^{n\pi x} - e^{n\pi(2-x)}) \operatorname{sen}(n\pi y) \end{aligned}$$

Para obter as soluções  $u_1(x, y)$  e  $u_2(x, y)$  resta substituir as expressões anteriores nas condições fronteiras que restam:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}: \quad u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n (1 - e^{2n\pi}) \operatorname{sen}(n\pi x) = \operatorname{sen} \pi x \\ \mathbf{2}: \quad u(0, y) = -5 \operatorname{sen}(3\pi y) &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} d_n (1 - e^{2n\pi}) \operatorname{sen}(n\pi y) = -5 \operatorname{sen}(3\pi y) \end{aligned}$$

Em geral, estas equações seriam resolvidos recorrendo à fórmula para os coeficientes da série de senos de uma função definida no intervalo  $[0, 1]$ . Neste caso, as condições iniciais são muito simples e podemos resolver as equações por inspecção:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}: \quad c_n &= 0 \text{ para } n \neq 1 \text{ e } c_1(1 - e^{2\pi}) = 1 \\ \mathbf{2}: \quad d_n &= 0 \text{ para } n \neq 3 \text{ e } d_3(1 - e^{6\pi}) = -5 \end{aligned}$$

Conclui-se finalmente que a solução do problema é

$$u(x, y) = \frac{1}{1 - e^{2\pi}} \operatorname{sen}(\pi x) (e^{\pi y} - e^{\pi(2-y)}) - \frac{5}{1 - e^{6\pi}} (e^{3\pi x} - e^{3\pi(2-x)}) \operatorname{sen}(3\pi y)$$

## APÊNDICE A. FORMA CANÓNICA DE JORDAN E SISTEMAS NÃO DIAGONALIZÁVEIS

**Definição A.1.** Uma matriz quadrada da forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

com  $\lambda \in \mathbb{C}$  diz-se um bloco de Jordan.

Diz-se que uma matriz  $n \times n$  complexa  $J$  está em forma canónica de Jordan se é diagonal por blocos e cada bloco diagonal é um bloco de Jordan. Ou seja,  $J$  está em forma canónica de Jordan se

$$(63) \quad J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix}$$

com  $J_i$  blocos de Jordan.

O seguinte teorema básico de Álgebra Linear garante que qualquer matriz quadrada é semelhante a uma matriz "quase diagonal".

**Teorema A.2.** *Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  complexa, existe uma matriz invertível  $S$  e uma matriz  $J$  em forma canónica de Jordan tal que*

$$A = SJS^{-1}.$$

**Nota A.3.** *Sendo  $J_i$  blocos de tamanho  $n_i$  com entrada diagonal  $\lambda_i$  temos*

$$\det(A - \lambda I) = \det(J - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

*Logo, o número de vezes que um número  $\mu \in \mathbb{C}$  ocorre na diagonal de  $J$  é a multiplicidade que  $\mu$  tem enquanto raiz do polinómio característico (que se chama a multiplicidade algébrica de  $\mu$ ). Em particular, as entradas na diagonal são exactamente os valores próprios de  $A$  repetidos de acordo com a sua multiplicidade.*

As colunas da matriz  $S$  formam uma base para  $\mathbb{C}^n$ . Vamos analisar o comportamento da transformação linear representada pela matriz  $A$  nesta base. Esta análise levar-nos-á a compreender como achar a forma canónica de Jordan de uma matriz  $A$  dada, assim como a matriz mudança de base  $S$  que a põe em forma canónica de Jordan.

Sejam

$$v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{C}^n$$

as colunas da matriz  $S$  que correspondem ao bloco de Jordan  $J_i$  e  $\lambda_i$  o valor que assumem as entradas diagonais de  $J_i$ . Uma vez que a coluna  $j$  de um produto de matrizes  $CD$  se obtém multiplicando a matriz  $C$  pela coluna  $j$  de  $D$ , a equação

$$AS = SJ$$

diz-nos que

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = \lambda_1 v_2 + v_1, \quad Av_3 = \lambda_1 v_3 + v_2, \quad \cdots \quad Av_m = \lambda_1 v_m + v_{m-1}$$

Portanto

- Os vectores que aparecem nas colunas de  $S$  correspondentes à primeira coluna de um bloco de Jordan  $J_i$  com  $\lambda_i$  na diagonal são vectores próprios de  $\lambda_i$ . Vamos dizer "primeiras colunas" para nos referir a estes vectores.

- Escrevendo um vector  $v \in \mathbb{C}^n$  na base das colunas de  $S$  vê-se imediatamente que  $v$  é um vector próprio de  $A$  com valor próprio  $\lambda$  sse  $v$  é uma combinação linear de primeiras colunas correspondentes a blocos com  $\lambda$  na diagonal. Em particular, o número de blocos de Jordan com  $\lambda$  na diagonal é o "número de vectores próprios linearmente independentes de  $\lambda$ ". Mais precisamente, o número de blocos de Jordan com  $\lambda$  na diagonal é a dimensão do espaço próprio de  $\lambda$  que se chama a *multiplicidade geométrica* de  $\lambda$ .
- Os vectores  $v_1, \dots, v_m$  satisfazem as equações

$$(64) \quad (A - \lambda_i I)v_2 = v_1, \quad (A - \lambda_i I)v_3 = v_2, \quad \dots, \quad (A - \lambda_i I)v_m = v_{m-1}$$

Diz-se que os vectores  $v_1, \dots, v_m$  formam uma *cadeia de Jordan*. Uma vez que  $(A - \lambda_i I)v_1 = 0$  isto implica a relação

$$(A - \lambda_i I)^j v_j = 0 \quad \text{para todo o } j$$

Diz-se que os vectores  $v_j$  são *vectores próprios generalizados* do valor próprio  $\lambda_i$ . O Teorema A.2 diz que é sempre possível obter uma base para  $\mathbb{C}^n$  formada por vectores próprios generalizados de  $A$ .

As observações anteriores podem ser usadas para determinar uma forma canónica de Jordan  $J$  e a correspondente matriz de mudança de base simultaneamente: começamos por calcular os valores próprios de  $A$  e uma base para o espaço próprio de cada valor próprio. Isso dá-nos o número de blocos de Jordan para cada um dos valores próprios de  $A$ . Se a multiplicidade algébrica de  $\lambda$  for superior à multiplicidade geométrica haverá pelo menos um bloco de Jordan para  $\lambda$  com tamanho maior do que 1. Para determinar o tamanho de cada bloco e, simultaneamente, as colunas de  $S$  que lhe correspondem tentamos resolver as equações (64) recursivamente começando com um vector próprio  $v_1$ .

**Exemplo A.4.** *Vamos determinar a forma canónica de Jordan para a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*O polinómio característico é*

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda)$$

*logo os valores próprios são 2, com multiplicidade algébrica 2 e 1, com multiplicidade algébrica 1. Um vector próprio para 1 é  $(1, -1, 0)$ . Os vectores próprios de 2 são as soluções da equação*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a - c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = c \end{cases}$$

*Uma base para os vectores próprios de 2 é  $(1, 0, 1)$  e portanto a multiplicidade geométrica de 2 é apenas 1. Isto significa que a matriz  $A$  não é diagonalizável. Há dois blocos de*

Jordan (um para cada vector próprio) e o bloco com 2 na diagonal tem dimensão 2 que é a multiplicidade algébrica de 2. Conclui-se que uma forma canónica de Jordan é

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz de mudança da base  $S$  tem  $(1, -1, 0)$  na primeira coluna e  $(1, 0, 1)$  na segunda. Para achar a terceira coluna resolvemos a equação (64):

$$(A - 2I)v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = c \end{cases}$$

Uma solução da equação anterior é, por exemplo,  $v_2 = (0, 1, 0)$  logo podemos tomar para matriz mudança de base

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O procedimento anterior funciona bastante bem para matrizes pequenas mas, em geral, pode ser difícil encontrar os vectores próprios  $v_1$  para os quais se consegue resolver as equações (64) recursivamente. O seguinte exemplo ilustra as dificuldades no caso mais simples.

**Exemplo A.5.** Seja  $A$  uma matriz com forma canónica de Jordan

$$(65) \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O espaço próprio de 1 tem dimensão 2. Seja  $\{v_1, v'_1\}$  uma base para o espaço próprio de 1. Tem que se ter cuidado na escolha do vector próprio  $v$  de 1 que se põe na primeira coluna da matriz  $S$ . De facto, só será possível resolver a equação (64)

$$(A - I)v_2 = v$$

para achar a segunda coluna se  $v$  estiver no espaço das colunas da matriz  $(A - I)$ , que tem dimensão 1. É portanto necessário achar uma combinação linear  $v = \alpha v_1 + \beta v'_1$  que pertença ao espaço das colunas de  $A - I$ . A terceira coluna poderá ser qualquer vector próprio de 1 que juntamente com  $v$  forme uma base para o espaço próprio.

Vejamos um exemplo concreto. Considere-se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

O polinómio característico é

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)^3$$

logo o único valor próprio é 1, com multiplicidade algébrica 3. Os vectores próprios de 1 são as soluções de

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2c = a + b$$

O espaço próprio de 1 é portanto o conjunto dos vectores

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ \frac{1}{2}(a+b) \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e 1 tem multiplicidade geométrica 2. Há portanto dois blocos de Jordan e a forma canónica de Jordan de  $A$  é necessariamente (65).

Não é no entanto possível resolver a equação (64)

$$(A - I)v_2 = v_1$$

quando  $v_1$  é um dos vectores  $(1, 0, \frac{1}{2})$  ou  $(0, 1, \frac{1}{2})$  da base "natural" do espaço próprio de 1. Como observámos acima, para que a equação tenha solução é necessário que  $v_1$  pertença ao espaço das colunas de  $A - I$ , que é o espaço gerado por  $(1, 1, 1)$ . A soma dos dois vectores da "base natural" é exactamente  $(1, 1, 1)$ . Resolvendo a equação

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2c = a + b + 1$$

obtemos as soluções

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ \frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Podemos tomar por exemplo  $v_2 = (0, 0, \frac{1}{2})$ . Para terceira coluna de  $S$  podemos tomar qualquer vector próprio de 1 que juntamente com  $(1, 1, 1)$  forme uma base do espaço próprio, por exemplo,  $(1, 0, \frac{1}{2})$ . Obtemos assim a matriz de mudança de base

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

O exemplo anterior é bastante simples e foi resolvido facilmente mas a situação complicase à medida que o número e tamanho dos blocos relativos ao mesmo valor próprio se complica. Por exemplo se a multiplicidade algébrica de  $\lambda$  é 4 e a multiplicidade geométrica é 2, não sabemos à partida qual é a dimensão dos dois blocos de Jordan associados a  $\lambda$ . As possibilidades são 1 e 3 ou 2 e 2. No primeiro caso teremos novamente que ter cuidado na selecção do vector próprio com o qual iniciar a resolução recursiva das equações (64) (terá de estar na imagem de  $(A - \lambda I)^2$ ). No final deste apêndice descreve-se um algoritmo geral (nada prático em termos de contas) para achar uma base para  $S$  (ver a secção A.12).



**A.6. Relação com sistemas de equações diferenciais.** A Proposição 33.1 juntamente com o Teorema A.2 dá-nos um procedimento para calcular  $e^{At}$  para qualquer matriz  $A$  e portanto resolver qualquer sistema com matriz de coeficientes  $A$  (homogéneo ou não).

Se for apenas necessário calcular a solução geral de um sistema homogéneo não é necessário calcular  $e^{At}$ . A seguinte Proposição (que generaliza a Proposição 29.8) permite achar uma solução matricial fundamental para o sistema  $\frac{dy}{dt} = Ay$  a partir de uma base de  $\mathbb{C}^n$  formada por vectores próprios generalizados.

**Proposição A.7.** *Se  $(A - \lambda I)^k v = 0$  então*

$$y(t) = e^{\lambda t} v + t e^{\lambda t} (A - \lambda I)v + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda t} (A - \lambda I)^{k-1} v$$

é uma solução do sistema  $\frac{dy}{dt} = Ay$ .

*Dem.* Temos

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} - A \right) (t^j e^{\lambda t} (A - \lambda I)^j v) &= (j t^{j-1} e^{\lambda t} + \lambda t^j e^{\lambda t}) (A - \lambda I)^j v - t^j e^{\lambda t} A (A - \lambda I)^j v \\ &= j t^{j-1} e^{\lambda t} (A - \lambda I)^j v - t^j e^{\lambda t} (A - \lambda I)^{j+1} e^{\lambda t} \end{aligned}$$

logo aplicando o operador  $\left( \frac{d}{dt} - A \right)$  à função  $y(t)$  do enunciado e notando que  $(A - \lambda I)^k v = 0$  obtemos a função nula, o que significa que  $y(t)$  é uma solução do sistema.  $\square$

Aplicando a Proposição anterior a uma base de  $\mathbb{C}^n$  formada por vectores próprios generalizados de  $A$ , obtém-se uma base para o espaço das soluções do sistema  $\frac{dy}{dt} = Ay$  e portanto a solução geral do sistema. Para um sistema não homogéneo podemos aplicar a Proposição 34.5.

**Exemplo A.8.** *Achar a solução geral do sistema*

$$\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} y$$

Aplicando a Proposição anterior aos vectores próprios generalizados achados no Exemplo A.4 obtemos as soluções

$$e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo a solução geral do sistema é

$$y(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t} \left( \begin{bmatrix} c_2 + c_3 t \\ c_3 \\ c_2 + c_3 t \end{bmatrix} \right), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

**A.9. Demonstração do Teorema A.2.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  complexa. Se  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um valor próprio de  $A$  o conjunto

$$V(\lambda) = \{v \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda I)^k v = 0 \text{ para algum } k \geq 1\}$$

chama-se o *espaço próprio generalizado* de  $A$  associado ao vector próprio  $\lambda$ . É fácil ver que  $V(\lambda)$  é um subespaço vectorial de  $\mathbb{C}^n$ .

Para cada  $j \geq 0$  seja

$$V(\lambda, j) = \{v \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda I)^j v = 0\}$$

Temos então uma sucessão de subespaços

$$0 = V(\lambda, 0) \subset V(\lambda, 1) \subset V(\lambda, 2) \subset \dots \subset V(\lambda, k) \subset \dots \subset V(\lambda)$$

Por definição,  $V(\lambda, 1)$  é o espaço próprio de  $\lambda$  e  $V(\lambda)$  é a união de todos os  $V(\lambda, j)$ . Uma vez que  $V(\lambda)$  tem dimensão finita, existe  $n(\lambda) \geq 1$  tal que

$$V(\lambda, n(\lambda) - 1) \subsetneq V(\lambda, n(\lambda)) = V(\lambda)$$

Note-se também que, uma vez que a matriz  $A$  comuta com a matriz  $(A - \lambda I)$ , os espaços  $V(\lambda, j)$  são invariantes, isto é,  $AV(\lambda, j) \subset V(\lambda, j)$ .

**Definição A.10.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  complexa e  $\lambda \in \mathbb{C}$  um valor próprio de  $A$ . O índice de um vector próprio generalizado  $v \in V(\lambda)$  é o menor  $i \geq 0$  tal que  $v \in V(\lambda, i)$ .*

Por exemplo o vector  $0$  tem índice  $0$  e um vector próprio tem índice  $1$ .

**Lema A.11.** *Se  $v \in V(\lambda)$  tem índice  $i$  então dado  $0 \leq j \leq i$ , o vector  $(A - \lambda I)^j v$  tem índice  $i - j$ . Além disso o conjunto*

$$(A - \lambda I)^{i-1} v, \dots, (A - \lambda I)v, v$$

*é linearmente independente (isto é, é uma cadeia de Jordan).*

*Dem.* Uma vez que  $(A - \lambda I)^{i-j} ((A - \lambda I)^j v) = 0$ , o vector  $(A - \lambda I)^j v$  pertence a  $V(\lambda, i - j)$ . Se estivesse contido em  $V(\lambda, m)$  com  $m < i - j$  então  $(A - \lambda I)^{j+m} v = 0$  e portanto  $v \in V(\lambda, m + j)$  contradizendo o facto de  $v$  ter índice  $i$ .

Suponhamos que  $\alpha_l \in \mathbb{C}$  são tais que

$$\alpha_{i-1}(A - \lambda I)^{i-1} v + \dots + \alpha_1(A - \lambda I)v + \alpha_0 v = 0$$

Aplicando  $(A - \lambda I)^{i-1}$  à combinação linear anterior obtemos

$$0 + \dots + 0 + \alpha_0(A - \lambda I)^{i-1} v = 0$$

logo  $\alpha_0 = 0$ . Aplicando  $(A - \lambda I)^{i-2}$  à combinação linear obtemos agora  $\alpha_1 = 0$ , e continuando da mesma maneira vemos que todos os  $\alpha_l$  são  $0$ .  $\square$

O plano da demonstração do Teorema A.2 é o seguinte. Iremos demonstrar que

- (1) A afirmação do Teorema é verdadeira quando  $\mathbb{C}^n = V(\lambda)$  para algum  $\lambda$ .
- (2) Dados valores próprios distintos  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  tem-se  $V(\lambda_1) \cap (\bigoplus_{j=2}^k V(\lambda_j)) = \{0\}$  logo a afirmação do Teorema é válida quando  $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} V(\lambda)$  onde  $\sigma(A)$  denota o conjunto dos valores próprios de  $A$ .

$$(3) \mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} V(\lambda)$$

*Dem. do Teorema A.2.* (1) O nosso objectivo é escrever uma base para  $\mathbb{C}^n = V(\lambda)$  formada por cadeias de Jordan (64). Seja  $l = n(\lambda)$ . Começamos por escolher uma base  $v_{l,1}, \dots, v_{l,k_l}$  para um espaço  $U(l)$  complementar a  $V(\lambda, l-1)$  em  $V(\lambda, l) = V(\lambda)$ .

Qualquer combinação linear não nula dos vectores  $v_{l,m}$  tem índice  $l$  e portanto o argumento usado na demonstração do Lema A.11 mostra que o conjunto

$$(66) v_{l,1}, \dots, v_{l,k_l}, (A - \lambda I)v_{l,1}, \dots, (A - \lambda I)v_{l,k_l}, \dots, (A - \lambda I)^{l-1}v_{l,1}, \dots, (A - \lambda I)^{l-1}v_{l,k_l}$$

é linearmente independente e portanto forma uma base para o subespaço

$$W(l) = U(l) + (A - \lambda I)U(l) + \dots + (A - \lambda I)^{l-1}U(l) \subset V(\lambda)$$

Este espaço é invariante para  $(A - \lambda I)$  e portanto para  $A$ . Na base (66) a transformação linear  $A$  é representada por uma matriz diagonal por blocos sendo todos os blocos, blocos de Jordan de dimensão  $l$ . O número de blocos é  $k_l$ . Os vectores  $v_{l,m}$  são as colunas de  $S$  correspondentes às colunas mais à direita destes blocos e os restantes vectores da base (66) são as restantes colunas de  $S$  correspondentes a estes blocos.

Seja  $U(l-1)$  um complementar para o subespaço  $V(\lambda, l-2) + (A - \lambda I)U(l) \subset V(\lambda, l-1)$ . Escolhemos uma base  $v_{l-1,1}, \dots, v_{l-1,k_{l-1}}$  para  $U(l-1)$  (que pode ser vazia se  $U_{l-1} = 0$ ). Note-se que qualquer combinação linear não nula destes vectores tem índice  $l-1$ . O argumento do Lema A.11 mostra novamente que o conjunto

$$(67) v_{l-1,1}, \dots, v_{l-1,k_{l-1}}, \dots, (A - \lambda I)^{l-2}v_{l-1,1}, \dots, (A - \lambda I)^{l-2}v_{l-1,k_{l-1}}$$

é linearmente independente. Mais geralmente, notando que qualquer combinação linear de  $(A - \lambda I)v_{l,1}, \dots, (A - \lambda I)v_{l,k_l}, v_{l-1,1}, \dots, v_{l-1,k_{l-1}}$  tem índice  $l-1$ , vemos que a união dos conjuntos (66) e (67) é linearmente independente.

Seja

$$W(l-1) = U(l-1) + (A - \lambda I)U(l-1) + \dots + (A - \lambda I)^{l-2}U(l-1)$$

Este espaço é invariante para  $A$  e na base (67) a transformação linear  $A$  é representada por uma matriz diagonal por blocos. Todos os blocos são blocos de Jordan de dimensão  $l-1$  e há  $k_{l-1}$  blocos.

Escolhemos agora um complementar  $U(l-2)$  para o subespaço  $V(l-3) + (A - \lambda I)^2U(l) + (A - \lambda I)U(l-1)$ . No espaço  $W(l-2) = U(l-2) + \dots + (A - \lambda I)^{l-3}U(l-2)$  a transformação linear é diagonal por blocos sendo todos estes blocos de Jordan de dimensão  $l-2$ .

Prosseguindo desta forma obtemos uma decomposição

$$V(\lambda) = W(l) \oplus W(l-1) \oplus \dots \oplus W(1)$$

e uma base de  $V(\lambda)$  na qual a transformação linear  $A$  é representada por uma matriz em forma canónica de Jordan.

(2) Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  valores próprios distintos. Para verificar que

$$V(\lambda_1) \cap (V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k)) = 0$$

basta ver que a transformação linear  $(A - \mu I)$  restrita a  $V(\lambda_1)$  é invertível se  $\mu \neq \lambda_1$ . Admitindo essa afirmação, a transformação linear  $(A - \lambda_2 I)^{n(\lambda_2)} \dots (A - \lambda_k I)^{n(\lambda_k)}$  é invertível em  $V(\lambda_1)$  e 0 em  $V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k)$  logo a intersecção dos dois espaços é nula.

Mas  $(A - \mu I) = (A - \lambda_1 I) + (\lambda_1 - \mu)I = (\lambda_1 - \mu) \left( \frac{1}{\lambda_1 - \mu} (A - \lambda_1 I) + I \right)$  tem inverso

$$\frac{1}{\lambda_1 - \mu} \left( I - \frac{1}{\lambda_1 - \mu} (A - \lambda_1 I) + \dots + (-1)^{n(\lambda_1)-1} \frac{1}{(\lambda_1 - \mu)^{n(\lambda_1)-1}} (A - \lambda_1 I)^{n(\lambda_1)-1} \right)$$

como se verifica facilmente.

(3) Seja  $\sigma(A)$  o conjunto dos valores próprios de  $A$  e suponhamos por absurdo que

$$Z = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} V(\lambda) \neq \mathbb{C}^n$$

Seja  $W$  um complemento para o espaço  $Z \subset \mathbb{C}^n$  e sejam  $n_1 = \dim Z$  e  $n_2 = \dim W$ . Podemos escolher uma base para  $\mathbb{C}^n$  tal que os primeiros  $n_1$  elementos da base pertencem a  $Z$  e os restantes a  $W$ . Nessa base a transformação linear definida por  $A$  tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} J & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

(onde  $J$  é uma matriz  $n_1 \times n_1$  e  $C$  é uma matriz  $n_2 \times n_2$ ). Seja  $w \in W$  um vector próprio da matriz  $C$  e  $\lambda$  o valor próprio correspondente. Então  $\lambda \in \sigma(A)$  e temos

$$Aw = \lambda w + z \Leftrightarrow (A - \lambda I)w = z \quad \text{para algum } z \in Z$$

Sejam  $\lambda_2, \dots, \lambda_k$  os elementos de  $\sigma(A) \setminus \{\lambda\}$ . Então

$$(A - \lambda_2 I)^{n(\lambda_2)} \dots (A - \lambda_k I)^{n(\lambda_k)} z \in V(\lambda)$$

logo

$$v = (A - \lambda_2 I)^{n(\lambda_2)} \dots (A - \lambda_k I)^{n(\lambda_k)} w$$

é tal que

$$(A - \lambda I)v \in V(\lambda)$$

e portanto

$$v \in V(\lambda) \subset Z.$$

Mas por outro lado

$$v = (\lambda - \lambda_2)^{n(\lambda_2)} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n(\lambda_k)} w + z'$$

com  $z' \in Z$ , o que é uma contradição.

□

**A.12. Algoritmo para a determinação da forma canônica de Jordan.** A demonstração do passo (1) do Teorema A.2 contém implicitamente o seguinte algoritmo (nada prático) para o cálculo da matriz  $J$  e  $S$ :

- (1) Achar o conjunto  $\sigma(A)$  dos valores próprios de  $A$ . Para cada  $\lambda \in \sigma(A)$ :
- (2) Determinar os espaços

$$V(\lambda, i) = \ker(A - \lambda I)^i \text{ para } i = 1, 2, \dots$$

e em particular determinar

$$n(\lambda) = \min\{k: \ker(A - \lambda I)^k = \ker(A - \lambda I)^{k+1}\}$$

- (3) Seja  $l = n(\lambda)$ . Determinar uma base  $v_{l,1}, \dots, v_{l,k_l}$  para um espaço  $U(\lambda, l)$  complementar a  $V(\lambda, l-1)$  em  $V(\lambda, l)$ . O número  $k_l$  é o número de blocos de Jordan com  $\lambda$  na diagonal de tamanho  $l$ . Cada  $v_{l,i}$  gera uma cadeia de Jordan de tamanho  $l$

$$v_{l,i}, (A - \lambda I)v_{l,i}, \dots, (A - \lambda I)^{l-1}v_{l,i}$$

que dão as colunas de  $A$  correspondentes a um bloco de Jordan de tamanho  $l$ .

- (4) Determinar uma base  $v_{l-1,1}, \dots, v_{l-1,k_{l-1}}$  para um espaço  $U(\lambda, l-1)$  complementar a  $V(\lambda, l-2) + (A - \lambda I)U(\lambda, l)$  em  $V(\lambda, l-1)$ . Cada  $v_{l-1,i}$  gera uma cadeia de Jordan de tamanho  $l-1$  que dá as colunas de  $A$  correspondentes a um bloco de Jordan de tamanho  $l-1$ .
- (5) Determinar uma base  $v_{l-2,1}, \dots, v_{l-2,k_{l-2}}$  para um espaço  $U(\lambda, l-2)$  complementar a  $V(\lambda, l-3) + (A - \lambda I)U(\lambda, l-1) + (A - \lambda I)^2U(\lambda, l)$  em  $V(\lambda, l-2)$ . Cada  $v_{l-2,i}$  gera uma cadeia de Jordan de tamanho  $l-2$  que dá as colunas de  $S$  correspondentes a um bloco de Jordan de tamanho  $l-2$ .
- (6) Continuando desta forma obtêm-se as colunas de  $S$  correspondentes aos blocos de Jordan com  $\lambda$  na diagonal (assim como o número destes blocos de cada dimensão).

#### REFERÊNCIAS

- [B] Luís Barreira, *Análise Complexa e Equações Diferenciais*, IST Press.
- [BV] Luís Barreira e Cláudia Valls, *Exercícios de Análise Complexa e Equações Diferenciais*, IST Press.
- [G] Pedro Girão, *Introdução à Análise Complexa, Séries de Fourier e Equações Diferenciais*, IST Press.
- [GF] Djairo Guedes de Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, IMPA, 1977.