Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Ficha de Trabalho 9

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

   (a) $x^3 + (y+1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$; (b) $\varphi' = e^{\varphi - t}$; (c) $xy + (1+x^2)y' = 0$;

   (d) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$; (e) $2ty^3 + 3t^2y^2y' = 0$; (f) $(1+t)\frac{dy}{dt} + \frac{y}{2} = (1+t)^{5/2}$.

2. Resolva o problema de valor inicial $x' = x \operatorname{sen} t + x^2 \operatorname{sen} t$, $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, indicando o intervalo máximo de definição da solução.

3. Considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c),$$

   em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

   a) Mostre que a substituição $v = at + by + c$, transforma a equação numa equação separável.

   b) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = e^{2t+y-1} - 2 \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

   indicando o intervalo máximo de definição da solução.

4. Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty} \quad , \quad t > 0 \quad \text{e} \quad y < 0,$$

   que verifica a condição inicial $y(1) = -1$, e indique o intervalo máximo de definição da solução. **Sugestão:** Considere a mudança de variável $v = y/t$.

5. Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{y}{x} + (y^3 - \log x)\,\frac{dy}{dx} = 0 \\ y(1) = \sqrt{2} \end{cases}.$$

6. Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial indicando o intervalo máximo de definição da solução:

(a) $3t^2+4tx+(2x+2t^2)x'=0, \quad x(0)=1;$

(b) $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{4y^2+2x}, \quad y(1)=1;$

(c) $\frac{x}{t}-\sin(t)+x'=0, \quad x(\pi)=1;$

(d) $y^2\left(\frac{1}{x}+\log x\right)+2y\log x\frac{dy}{dx}=0; \quad y(e)=-1.$

7. Considere a equação diferencial ordinária

$$\left(4x^2y+3xy^2+2y^3\right)+\left(2x^3+3x^2y+4xy^2\right)\frac{dy}{dx}=0. \tag{1}$$

a) Mostre que (1) tem um factor integrante do tipo $\mu=\mu(xy)$.

b) Mostre que a solução de (1) com condição inicial $y(-1)=1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4=1$.

c) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto -1, da solução dada implicitamente na alínea anterior.

8. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções.

$$\text{(a) } y'=\frac{t\,y}{1+t^2}\ ; \qquad \text{(b) } y'=(2-y)\,(y-1);$$

$$\text{(c) } y'=y\,(1-y^2)\ ; \quad \text{(d) } y'=\frac{y+t}{y-t}\ .$$