Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

# Análise Complexa e Equações Diferenciais

# Ficha de Trabalho 8

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

   a) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$; b) $\dfrac{dy}{dt} = -ye^t$;

   c) $\dfrac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$; d) $\psi' = \psi - t$;

   e) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x-2)e^x$; f) $\dfrac{di}{dt} - 6i = 10\,\text{sen}(2t)$;

   g) $\dfrac{dy}{dt} = y(\dfrac{1}{t} - \tan t) + t\cos t$; h) $(1+y^2)\dfrac{dx}{dy} = \arctan y - x$.

2. Determine as soluções dos seguintes problemas de valor inicial

   a) $xy' = 2y + x^3e^x,\ y(1) = 0$.

   b) $\dfrac{dv}{du} + \dfrac{2u}{1+u^2}v - \dfrac{1}{1+u^2} = 0,\ v(0) = 1$.

   c) $\begin{cases} x' + h(t)x - t = 0 \\ x(-1) = 2 \end{cases}$, com $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$.

3. De acordo com a lei de arrefecimento de Newton, a taxa de arrefecimento de um corpo numa corrente de ar é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a do ar. Assumindo que a temperatura do ar é 30° e que o corpo arrefece de 100° para 70° em 15m, determine o tempo que o corpo demora a atingir a temperatura de 40°.

4. Determine a solução geral da equação diferencial

$$x^2 \cos y \frac{dy}{dx} = 2x \sin y - 1.$$

   **Sugestão:** Efectue a mudança de variável $v = \sin y$.

5. Considere a equação diferencial

$$t^2 \frac{dy}{dt} + 2ty - y^3 = 0.$$

   (a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-2}$.

(b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.

(c) No caso geral, considere a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x + \beta(t)x^n,$$

onde $\alpha$ e $\beta$ são funções definidas e contínuas em $I \subset \mathbb{R}$. Mostre que a mudança de variável $y(t) = (x(t))^{1-n}$ transforma a equação numa equação linear.

6. Resolva os seguintes problemas de valor inicial envolvendo equações de Bernoulli:

(a) $\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = \frac{y^3}{t^2}, \quad y(1) = 2;$

(b) $t\frac{dy}{dt} + y = -ty^2, \quad y(1) = 1.$

7. Considere a equação de Ricati escalar

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - x - x^2. \tag{1}$$

(a) Mostre que a função $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t)$ é solução da equação de Ricati sse $\psi$ é solução de uma certa equação de Bernoulli.

(b) Determine a solução da equação (1).

8. Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = f(t),$$

onde $a$ e $f$ são funções contínuas em $\mathbb{R}$ que verificam

$$a(t) > c > 0 \quad \forall t \quad , \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = 0.$$

Mostre que quaquer solução da equação diferencial satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$